

Chapitre II

Modèles hydrodynamiques

par

François C. RONDAY

Y. RUNFOLLA

Y. ADAM

A.- CIRCULATION DUE A LA MAREE EN MER DU NORD

1.- Introduction

Dans le présent travail, nous établirons un modèle mathématique de marée afin d'en déterminer les courants qui sont les principaux responsables de la diffusion des polluants. Les nombreuses informations côtières sont indispensables pour tester la précision du modèle; nous nous sommes basés sur les constantes harmoniques fournies par le Bureau Hydrographique International de Monaco.

Comme le but que nous nous sommes assignés est de construire un modèle de marée et non de retrouver toutes les caractéristiques de toutes les marées partielles, nous nous sommes bornés à étudier la marée partielle la plus importante qui est du type semi-diurne car le *Form - Zahl* facteur, introduit par Defant (1961), est partout inférieur à 0,25 excepté en deux points : Lowestoft (0,34) et Fair Isle (0,28). Le pourcentage de la marée M_2 dans l'élévation à vive eau est le suivant :

- pour le nord de la mer du Nord (76 ± 7) %
- pour le *Southern Bight* (78 ± 4) % .

Ainsi l'étude de la seule marée partielle M_2 nous donnera des renseignements très utiles sur les phénomènes associés à la marée réelle existant en mer du Nord.

2.- Formulation mathématique

En introduisant la notion de transport

$$(2) \quad V_1 = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v}_1 \, dx_3 \quad , \quad V_2 = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v}_2 \, dx_3 \quad ,$$

les équations de conservation de la masse et du moment donnent, dans le cas où l'on suppose l'équilibre quasi statique, l'homogénéité du fluide et la viscosité turbulente constante [Nihoul (1972)] :

$$(3) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} - fV_2 - A_h \Delta V_1 + \frac{k}{H^2} V_1 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_1}{H} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_2}{H} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ = \tau_1 + H X_1$$

$$(5) \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} + fV_1 - A_h \Delta V_2 + \frac{k}{H^2} V_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \lambda \frac{V_1}{H} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_2}{H} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \\ = \tau_2 + H X_2$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées spatiales; t la coordonnée temporelle; V_1, V_2 les deux composantes du transport fluide; ζ l'élévation du niveau de la surface de la mer par rapport à sa position d'équilibre h ; $H = h + \zeta$ la profondeur instantanée; X_1 et X_2 les composantes des forces extérieures; τ_1 et τ_2 les composantes de la contrainte du vent sur la surface; f le paramètre de Coriolis; k le coefficient de friction sur le fond; g la gravité de la terre; A_h le coefficient de viscosité turbulente et λ un coefficient qui tient compte du profil vertical du courant.

Defant (1961) a montré que la marée astronomique est de loin beaucoup plus faible que celle externe pour les mers côtières et les golfes. Dans ces conditions, nous pouvons supposer

$$X_1 \sim 0 \, \text{m/s}^2$$

$$X_2 \sim 0 \, \text{m/s}^2$$

sans trop restreindre la généralité du modèle. Le travail développé par les forces extérieures provient donc principalement de l'onde de marée atlantique qui engendre aux ouvertures de la mer du Nord des ondes progressives.

Nous prendrons un coefficient de profil vertical du courant ($\lambda = 1$) comme Kreiss (1957) et Brettschneider (1967) l'ont suggéré. Le terme de viscosité turbulente A_h lisse le champ de vitesse et on pourrait montrer que sa présence est indispensable pour obtenir un schéma numérique non divergent. Les observations de Bowden (1966) ont donné pour A_h un ordre de grandeur de $10^2 \text{ m}^2/\text{s}$; en introduisant cette valeur dans notre modèle, il a été impossible de reproduire avec succès les lignes cotidales et d'égale amplitude. Nous avons dû, comme Brettschneider, choisir une valeur beaucoup plus grande $A_h \sim 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$. Ce terme ne représente plus la viscosité turbulente réelle mais bien un coefficient de lissage rendu nécessaire pour reproduire correctement la marée.

Le schéma de discrétisation de Lax et Wendroff (1960) a été choisi car une étude critique de Fischer (1965) a montré qu'il conduisait aux meilleurs résultats (voir *A survey of finite-difference approximations to the primitive equations*). Les figures 1, 2 et 3 nous montrent les procédures de calcul.

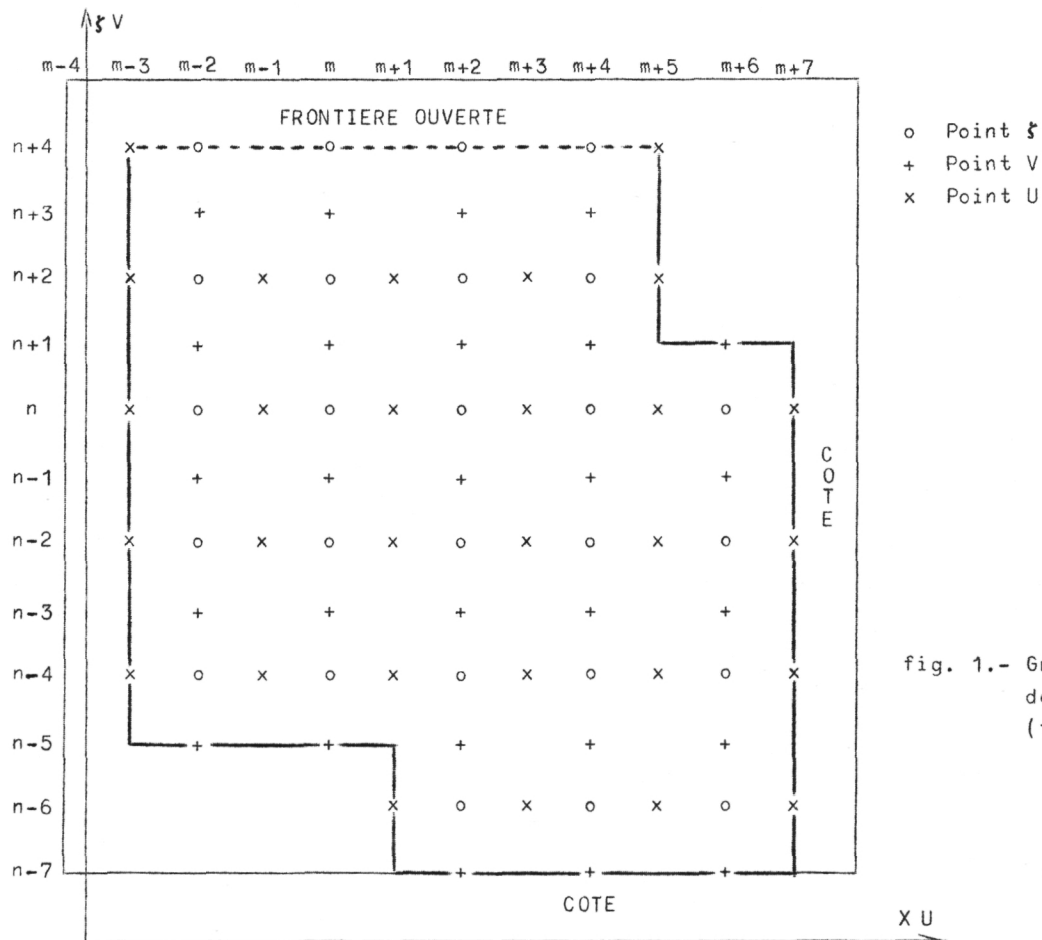


fig. 1.- Grille spatiale de Lax-Wendroff (1960).

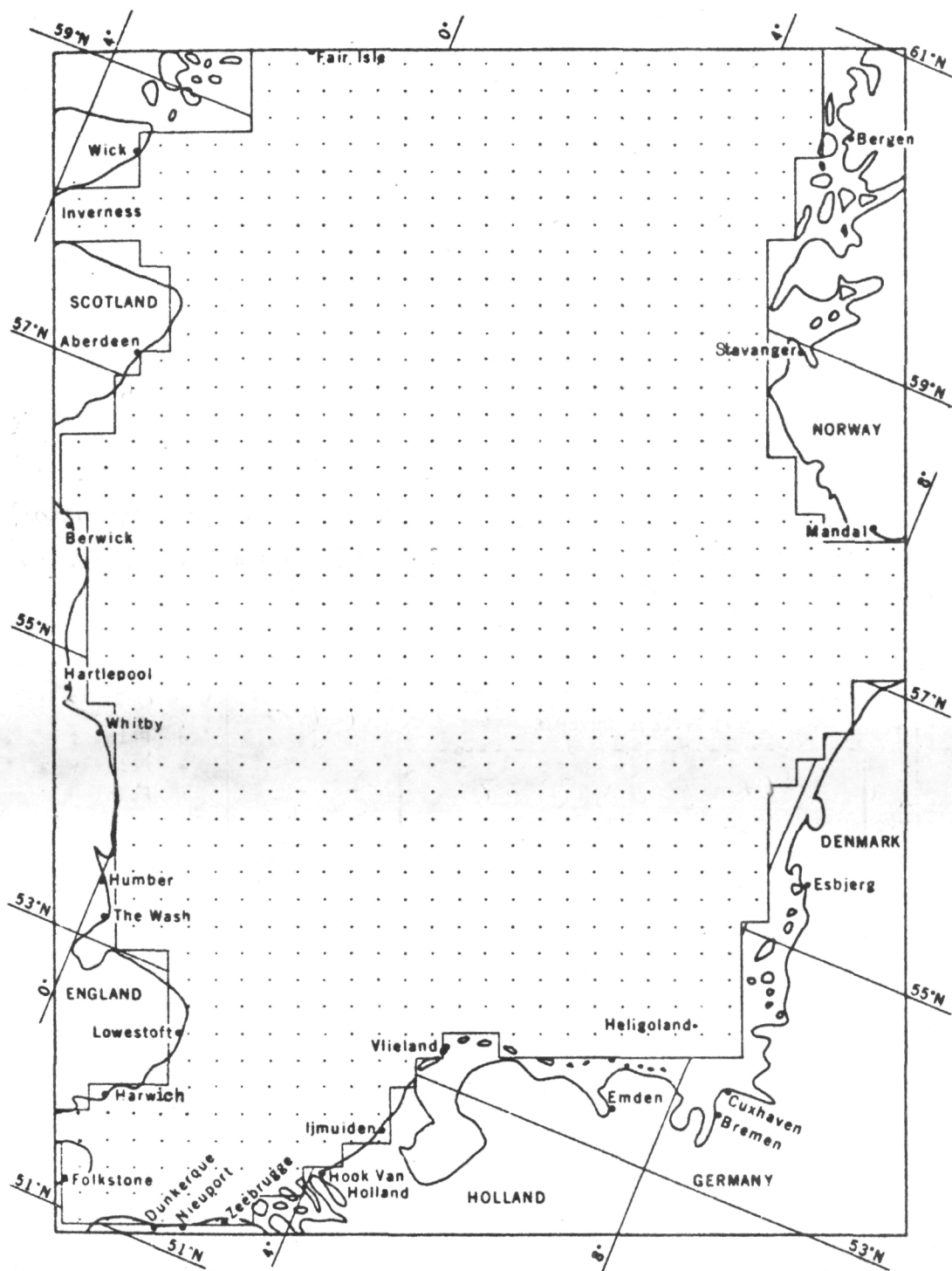


fig. 2.- Grille numérique utilisée pour l'étude de la circulation due à la marée.

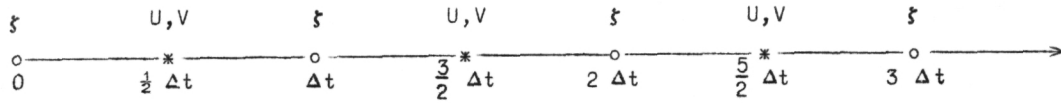


fig. 3.- Procédure de calcul

Les termes de viscosité turbulente, de friction sur le fond et d'advection sont calculés au temps précédent pour éviter les divergences numériques. Dans ces conditions, aux équations différentielles partielles (3), (4) et (5) correspondra le système d'équations simultanées suivant :

$$(6) \quad Z_{2i,2j}^{(n)} = Z_{2i,2j}^{(n-2)} - \frac{\Delta t}{\Delta s} \{ U_{2i+1,2j}^{(n-1)} + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} - U_{2i-1,2j}^{(n-1)} - U_{2i,2j-1}^{(n-1)} \}$$

$$(7) \quad U_{2i+1,2j}^{(n+1)} = U_{2i+1,2j}^{(n-1)} - 2 \Delta t \left\{ U_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{U_{2i+3,2j}^{(n-1)} - U_{2i-1,2j}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}} \right. \\ + \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} - U_{2i+1,2j-2}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}} \\ + g \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j} \frac{Z_{2i+2,2j}^{(n)} - Z_{2i,2j}^{(n)}}{2 \Delta s} \\ - f \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} + k U_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{\sqrt{[U_{2i+1,2j}^{(n-1)}]^2 + [\tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)}]^2}}{[\tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}]^2} \\ \left. - \frac{A_h}{4(\Delta s)^2} [U_{2i+3,2j}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j-2}^{(n-1)} - 4 U_{2i+1,2j}^{(n-1)}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad U_{2i,2j+1}^{(n+1)} = U_{2i,2j+1}^{(n-1)} - 2 \Delta t \left\{ \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} - U_{2i-2,2j+1}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_{V,2i,2j+1}^{(n)}} \right. \\
 + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{U_{2i,2j+3}^{(n-1)} - U_{2i,2j-1}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_{V,2i,2j+1}^{(n)}} \\
 + g \tilde{H}_{V,2i,2j+1}^{(n)} \frac{Z_{2i,2j+2}^{(n)} - Z_{2i,2j}^{(n)}}{2 \Delta s} \\
 + f \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} + k U_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{\sqrt{[\tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)}]^2 + [U_{2i,2j+1}^{(n-1)}]^2}}{[\tilde{H}_{V,2i,2j+1}^{(n)}]^2} \\
 \left. - \frac{A_h}{4(\Delta s)^2} [U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i-2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i,2j+3}^{(n-1)} \right. \\
 \left. + U_{2i,2j-1}^{(n-1)} - 4 U_{2i,2j+1}^{(n-1)}] \right\}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{U,2i+1,2j}^{(n)} &= H_{2i+1,2j} + \frac{1}{2} \{Z_{2i+2,2j}^{(n)} + Z_{2i,2j}^{(n)}\} \\
 \tilde{H}_{V,2i,2j+1}^{(n)} &= H_{2i,2j+1} + \frac{1}{2} \{Z_{2i,2j+2}^{(n)} + Z_{2i,2j}^{(n)}\} \\
 \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} &= \frac{1}{4} \{U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i+2,2j-1}^{(n-1)} + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i,2j-1}^{(n-1)}\} \\
 \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} &= \frac{1}{4} \{U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j}^{(n-1)}\}
 \end{aligned}$$

Fischer (1959, 1965), Kasahara (1965), Harris et Jelesnianski (1965) ont étudié le problème de la stabilité numérique du système d'équations (3), (4) et (5) et ont montré qu'on pouvait estimer le pas temporel par la relation de Courant-Friedrich :

$$(10) \quad 2 \Delta t < \frac{2 \Delta s}{\sqrt{2} g h_{\max}}$$

La profondeur en mer du Nord est partout inférieure ou égale à 500 mètres et le pas spatial choisi vaut 21.700 mètres; le critère de Courant-Friedrich donne en introduisant ces valeurs dans la relation (10) :

$$(11) \quad 2 \Delta t < 217 \text{ s} .$$

On pourrait certes utiliser d'autres formules donnant le pas temporel maximal qui feraient intervenir la rotation de la terre, la friction sur le fond et la viscosité turbulente mais l'influence de ces termes sur le choix du pas temporel maximal est faible. La forme irrégulière du fond est source d'instabilités imprévisibles lorsque les gradients de profondeur sont importants (cas de la mer du Nord); nous avons été obligés pour cette raison de réduire le pas temporel donné par la relation (11) et avons choisi, pour des raisons pratiques, un pas temporel correspondant à $1/360$ de la période de la marée M_2 :

$$2 \Delta t = \frac{T_{M_2}}{360} = 124,3 \text{ s} .$$

Le système ne montre aucun signe d'instabilités avec cette valeur, ce qui prouve que le choix du pas est adéquat.

Le système d'équations différentielles partielles doit satisfaire à des conditions initiales et aux frontières.

Conditions initiales

Le système d'équations différentielles partielles est du type hyperbolique car il admet des multiplicités caractéristiques réelles. Sur des exemples simples, on vérifie en s'appuyant sur les propriétés des systèmes hyperboliques que le régime oscillatoire établi est pratiquement indépendant des conditions initiales. Nous pouvons donc supposer les deux composantes du transport et l'élévation de la surface nulles à tous les noeuds de la grille à l'instant initial.

Conditions aux frontières

i) le long des côtes

Le flux de fluide normal à une côte est partout et à tout instant nul :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

ii) le long des frontières ouvertes

L'élévation de la surface de la mer est donnée par la relation :

$$H = A \cos (\sigma t_{Gr} + p\lambda - \kappa)$$

où t_{Gr} est le temps de Greenwich, $p = 2$ car la marée est semi-diurne et où λ est la longitude géographique positive vers l'est.

Ne connaissant les constantes harmoniques de marée que le long des côtes, une interpolation linéaire a permis de calculer l'élévation de la surface aux points frontières situés en pleine mer. Les constantes harmoniques de la marée M_2 sont les suivantes :

	Amplitude A (cm)	Phase κ_{Gr} (degrés)
Pas-de-Calais		
côté nord (4,4)	245	330
côté sud (4,2)	270	325
à la frontière nord		
côté est (24,86)	63,2	306
côté ouest (58,86)	43,9	241
à la frontière baltique		
côté nord (64,50)	8,3	80
côté sud (64,42)	10,8	95

avec $\kappa_{Gr} = - (p\lambda - \kappa)$.

3.- Discussion des résultats

Le but de ce travail est de déterminer les courants de marée de la manière la plus précise que possible. Les observations côtières (amplitude et phase de l'élévation de la mer) permettent de vérifier la qualité du modèle.

3.1.- Influence du nombre d'itérations sur l'amplitude de la marée calculée (fig. 4)

La figure 4 montre l'influence du nombre d'itérations sur l'élévation de la surface à deux points choisis l'un près, l'autre éloigné des forces excitatrices. On remarque donc que le système est en régime après trois périodes de marée, c'est-à-dire 1.080 itérations soit 37,29 heures, même

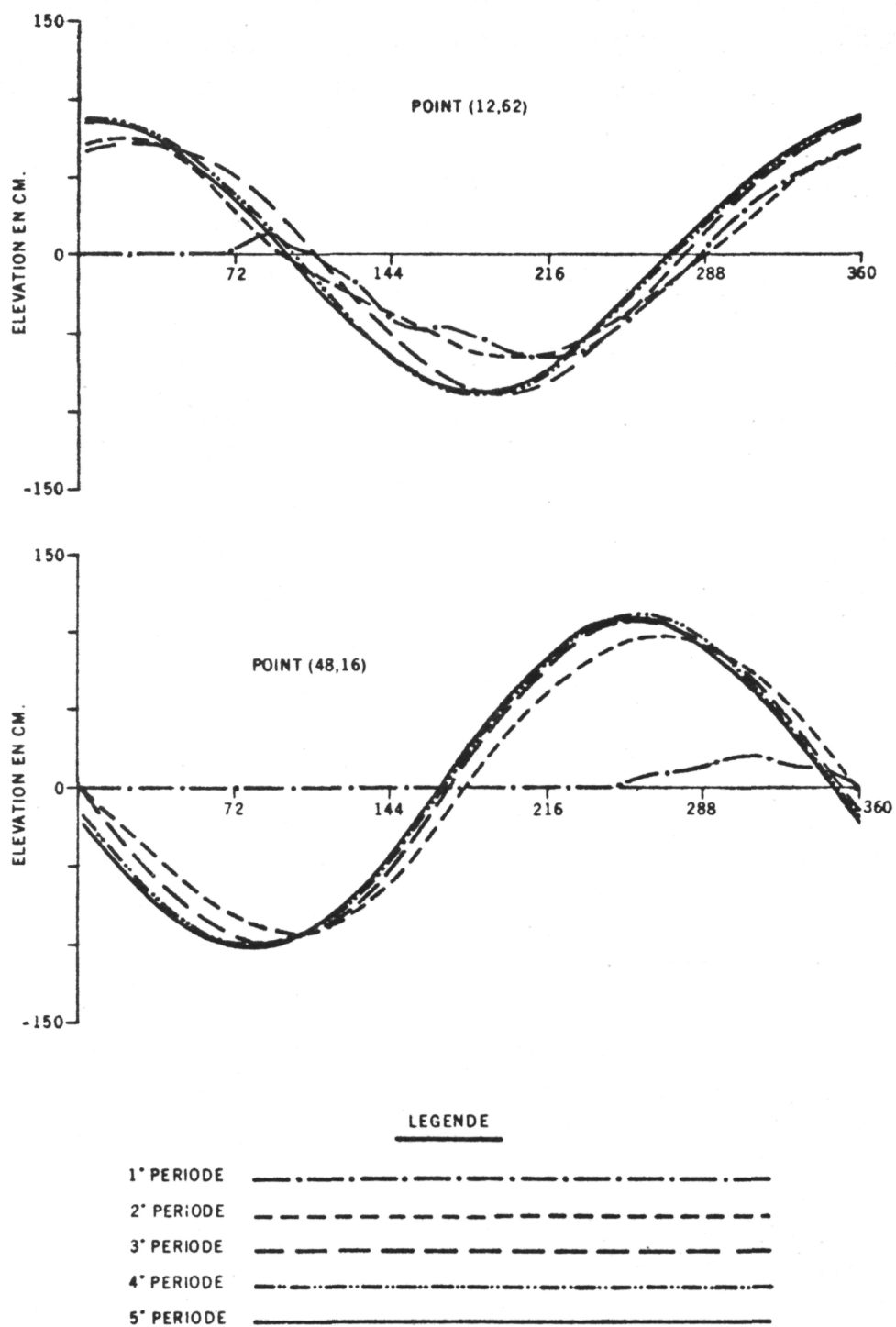


fig. 4.- Influence du nombre d'itérations sur l'élévation de la surface de la mer.

pour des points éloignés des forces excitatrices et situés dans des eaux peu profondes. Ce fait est une justification de notre hypothèse de départ portant sur l'insensibilité des systèmes hyperboliques, soumis à des oscillations forcées, à la forme particulière donnée aux conditions initiales.

Conclusions

Le modèle est donc en régime après trois périodes ce qui nous autorisera, dans nos prochains travaux, à limiter le nombre d'itérations à 1.440 .

3.2.- Comparaison des résultats fournis par les méthodes expérimentales et numériques (fig. 5 et 6, tableau 1)

Afin de tester la qualité de notre modèle, nous comparerons les marées observées et calculées à différentes stations marégraphiques côtières. Nous nous sommes basés, dans toute cette discussion, sur les informations fournies par le Bureau Hydrographique International de Monaco. Quelques détails doivent être donnés sur la méthode utilisée pour calculer l'amplitude et la phase de la marée aux ports et endroits non situés aux noeuds du modèle. Nous nous sommes servis de l'interpolation linéaire, à défaut de mieux, pour calculer l'élévation du niveau de la mer à la côte. Lorsqu'un port se situe au fond d'un chenal, comme Bergen et Bremen par exemple, l'élévation de la surface sera supposée égale à celle que l'on observerait à la côte si le chenal était fermé. Pour la phase, nous avons agi différemment : l'interpolation linéaire sera toujours de rigueur pour les ports situés le long des côtes alors que pour ceux situés au fond d'un chenal, nous avons estimé le retard de phase en supposant que l'onde de marée progresse à la vitesse $0,8 \sqrt{gh}$ pour tenir compte de la friction sur le fond.

Les figures 5 et 6 et le tableau 1, donnant les corrélations entre les résultats observés et calculés tant pour l'amplitude que la phase de la marée partielle M_2 , montrent que certains points s'éloignent de la droite idéale à 45° ; ils correspondent aux régions situées le long des côtes est de l'Angleterre et du Danemark caractérisées par de très basses profondeurs et de nombreux bancs de sable. En raison de ces hauts fonds

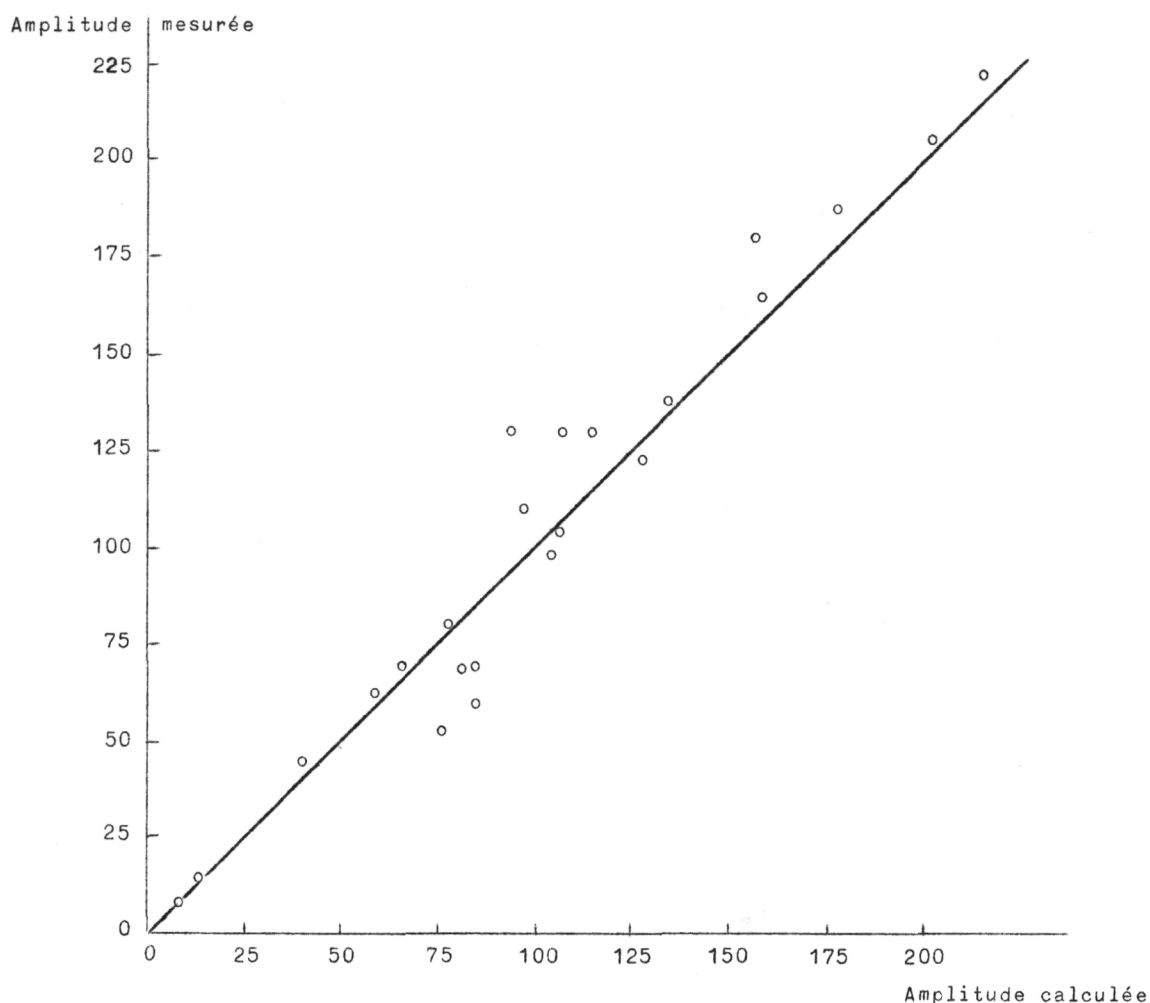


fig. 5.- Corrélation entre l'amplitude calculée et observée de la marée M_2 .

qui sont responsables de divergences numériques, nous avons été obligés de les réduire en nous servant d'un artifice : le lissage des profondeurs. Il permet d'éliminer les divergences mais il est la cause de nombreux problèmes :

- i) réduction de l'amplitude de la marée et de ses composantes non linéaires,
- ii) diminution de la phase de la marée; donc augmentation de la vitesse de l'onde (on développera cette question dans le paragraphe 3.6 de la discussion des résultats).

Tableau 1

	Latitude	Longitude	Amplitude A (cm)		Phase κ_{Gr} (degrés)	
			Observée	Calculée	Observée	Calculée
Dunkerque	51°03'N	2°22'E	206	203	352	348
Nieuport	51°09'N	2°44'E	188	178	0	0
Oostende	51°14'N	2°55'E	180	157	5	6
Zeebrugge	51°21'N	3°12'E	169	158	15	14
Hoek van Holland	51°59'N	4°07'E	80	78	64	66
Ijmuiden	52°28'N	4°35'E	68	82	106	108
Den Helder	52°58'N	4°45'E	53	74	159	164
Vlieland	53°18'N	5°03'E	69	84	226	188
Emden	53°21'N	7°12'E	131	107	339	331
Cuxhaven	53°52'N	8°43'E	123	128	341	340
Helgoland	54°11'N	7°53'E	99	105	316	270
Esbjerg	55°29'N	8°27'E	60	85	39	330
Mandal	58°00'N	7°34'E	8,3	8,3	94	78
Stavanger	58°59'N	5°44'E	15	15	271	270
Bergen	60°24'N	5°18'E	44	37	287	275
Fair Isle	59°33'N	1°38'0	63	61	304	306
Wick	58°26'N	3°05'0	111	98	320	314
Invergordon	57°41'N	4°10'0	138	134	336	346
Aberdeen	57°09'N	2°05'0	131	98	25	6
Berwick	55°46'N	2°00'0	161	110	61	42
Whitby	54°29'N	0°37'0	165	135	103	95
Lowestoft	52°29'N	1°46'E	70	67	259	220
Harwich	51°57'N	1°17'E	130	110	326	336
Dover	51°07'N	1°19'E	223	215	330	336

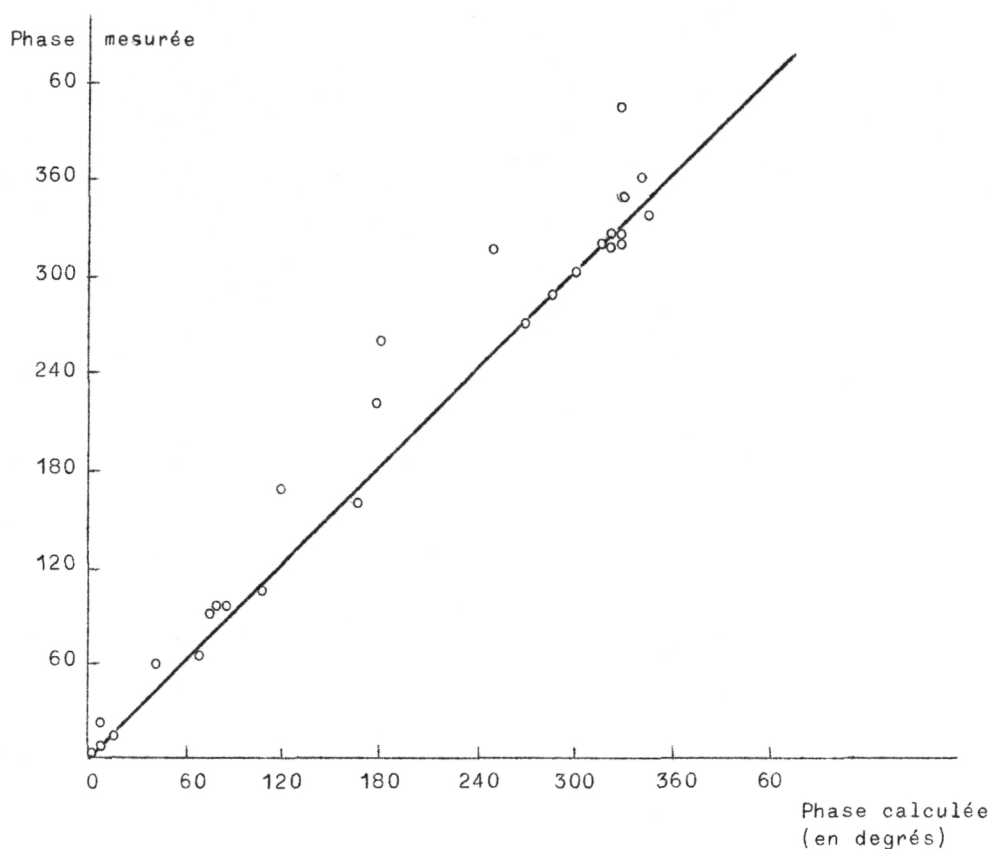


fig. 6.- Corrélation entre la phase calculée et observée de la marée M_2 .

Conclusions

Malgré le lissage exagéré, que nous espérons réduire dans le futur, notre modèle donne des résultats satisfaisants en tout point comparables à ceux fournis par les Instituts Hydrographiques Nationaux.

3.3.- Lignes cotidales et d'égalé amplitude (fig. 7 et 8)

Si on compare les lignes d'égalé amplitude et cotidales observées (fig. 7) et calculées (fig. 8) on peut conclure à un accord raisonnable entre celles-ci. Les discordances apparaissent dans le *Deutsche Bucht* et le long des côtes est de l'Angleterre, régions caractérisées par de hauts fonds. Dans le paragraphe 3.2 de cette discussion, nous avons déjà expliqué l'origine de ces discordances que nous espérons réduire dans nos travaux ultérieurs en diminuant le lissage des profondeurs.

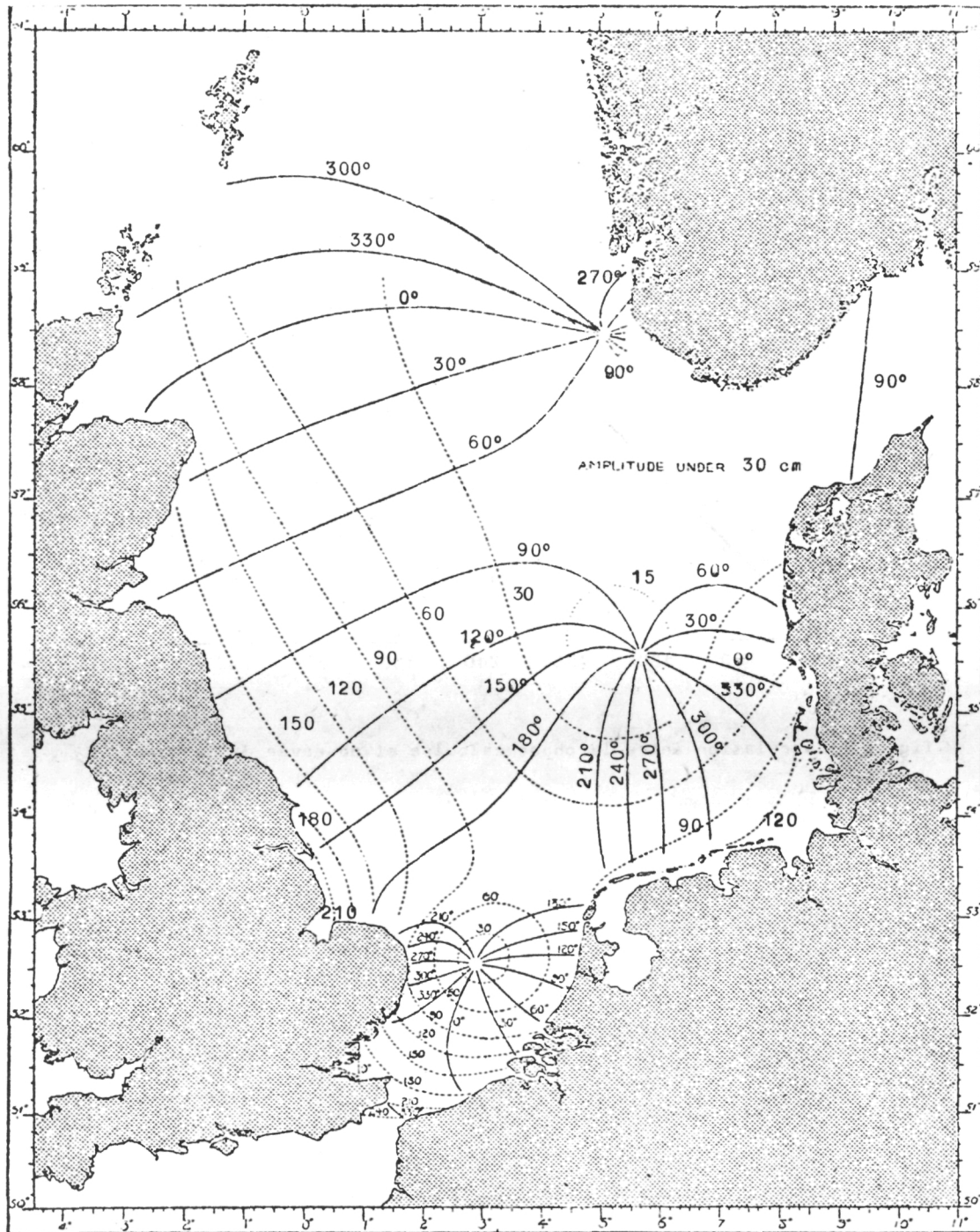


fig. 7.- Lignes cotidales et d'égale amplitude observées.
(Proudman et Doodson, 1924)

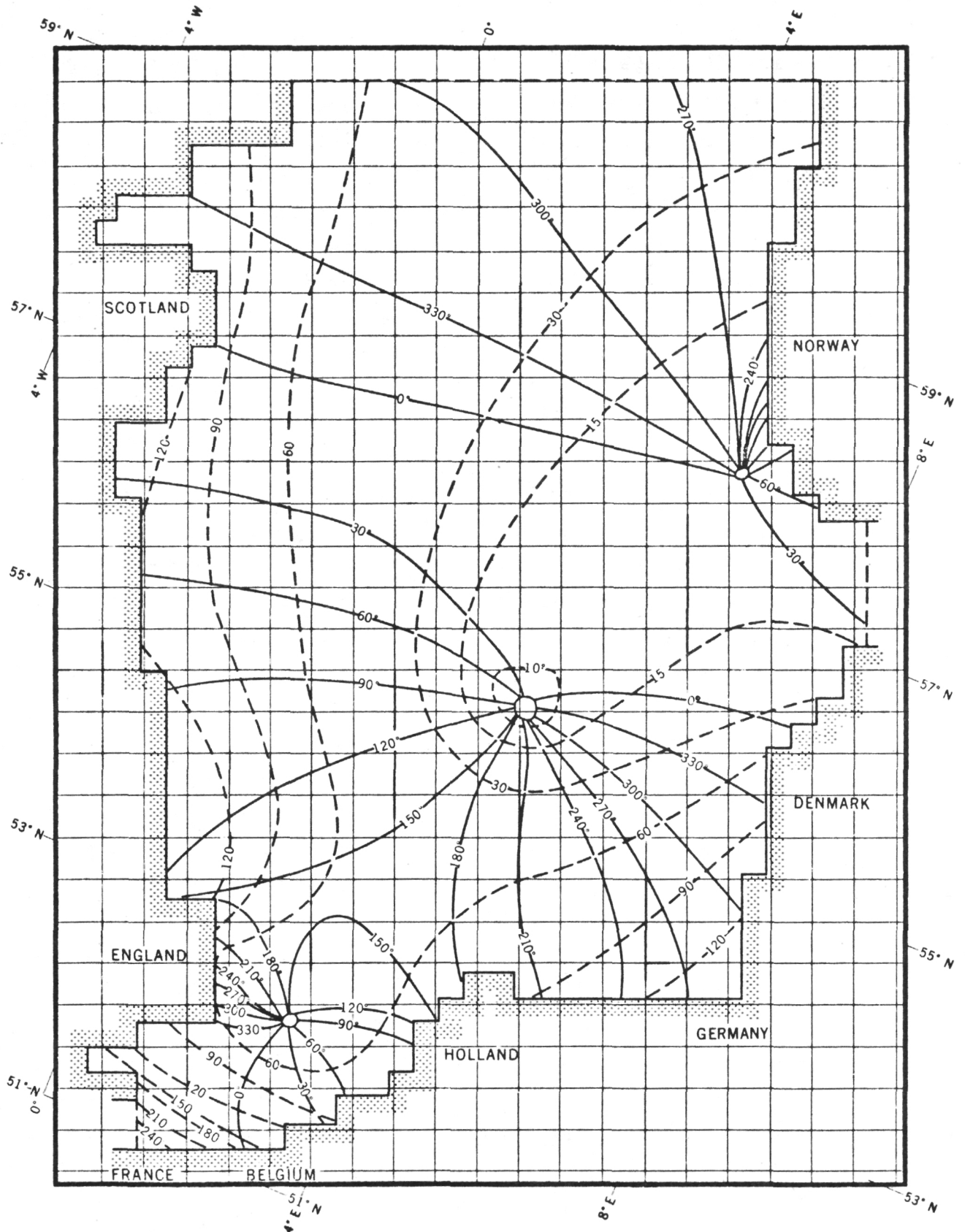


fig. 8.- Lignes cotidiales et d'égale amplitude calculées avec le modèle mathématique.

3.4.- Les courants de marée (fig. 9 à 20)

Ayant testé le modèle en nous basant sur les observations côtières, il nous reste à étudier le champ de courant dû à la marée partielle M_2 . Les figures 9 et 10 donnent respectivement les courants à $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$; on remarque immédiatement que les courants intenses se localisent dans les régions de faibles profondeurs où ils peuvent atteindre une vitesse de 113 cm/s. Le long des côtes de la Norvège, l'amplitude du courant est très faible (2 à 3 cm/s) en raison de la profondeur partout supérieure à 200 mètres. Dans cette région, les courants dus à la marée astronomique que nous avons négligée dans le modèle, sont du même ordre de grandeur que ceux associés à la marée externe. L'hypothèse d'une marée astronomique négligeable se justifie parfaitement car notre zone d'intérêt se limite dans le *Southern Bight* où la marée externe est intense.

Les différences entre les courants observés et calculés (fig. 11 à 18) sont faibles. Elles apparaissent surtout au moment du renversement du courant : un léger déphasage suffit alors pour modifier sensiblement la distribution des courants en raison de l'anisotropie marquée des ellipses de marée (fig. 19 et 20).

La figure 19 nous montre la distribution des ellipses de marée ainsi que leur sens de rotation. On remarque directement que celles-ci tournent indifféremment à gauche ou à droite. Dans une mer de dimensions infinies, la rotation du vecteur courant se fait vers la droite dans l'hémisphère nord; dans une mer de dimensions réduites et presque entièrement fermée, comme la mer du Nord, il est pratiquement impossible de déterminer *a priori* le sens de rotation de l'ellipse à cause des réflexions multiples de l'onde de marée. Il n'y a que les observations et les modèles physiques et numériques qui puissent nous indiquer le sens de rotation du courant de marée.

L'amplitude et la phase des courants sont affectées d'erreurs (5 à 20 %) dues à la discrétisation du milieu, au lissage des profondeurs et aux erreurs d'estimation des conditions aux limites (interpolation linéaire). Nous ne pouvons vérifier la précision du modèle en toute rigueur car les mesures courantométriques que nous possédons actuellement sont peu précises et peu nombreuses. Des campagnes de mesures courantométriques réalisées à l'aide d'instruments perfectionnés, mouillés durant plusieurs jours

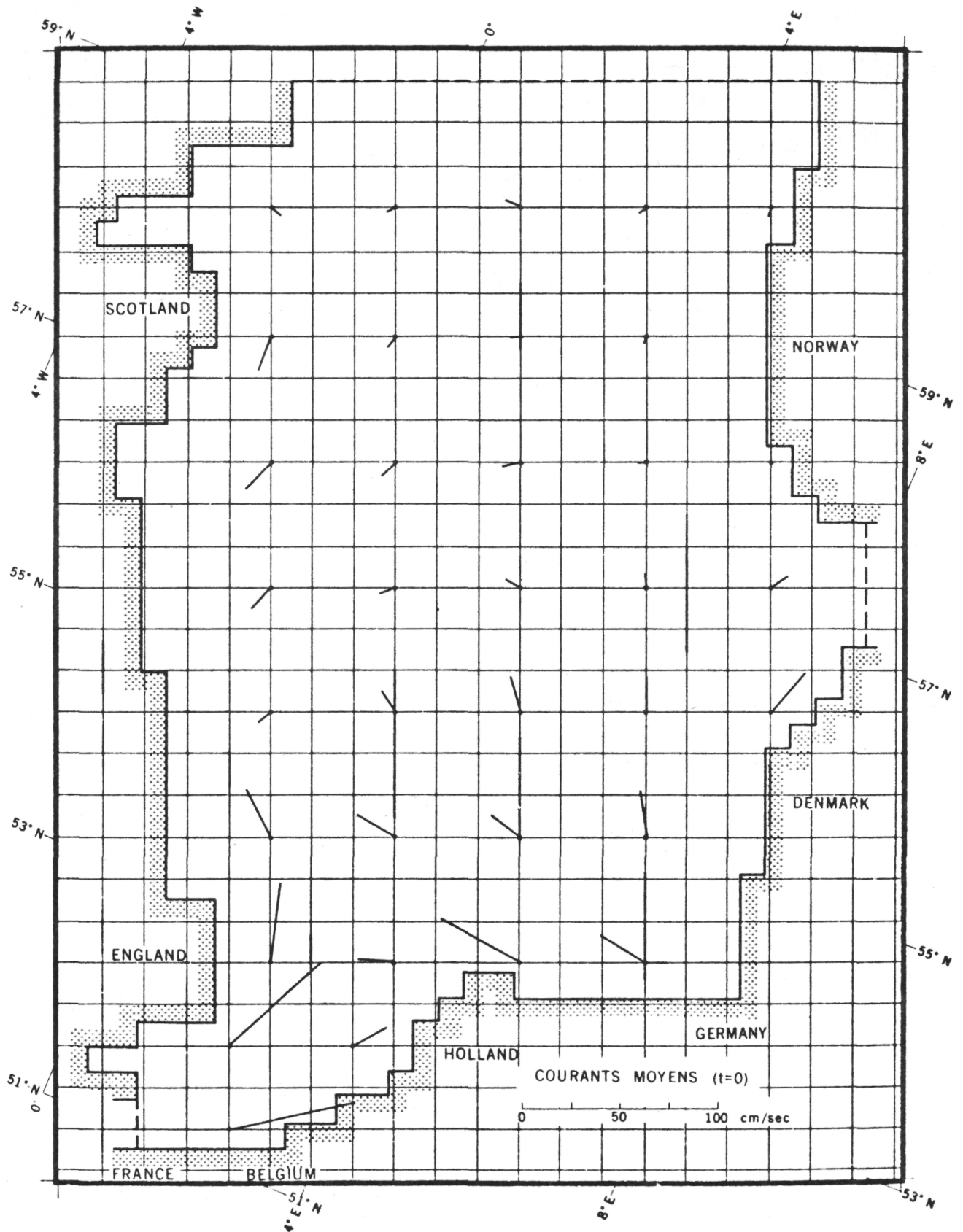


fig. 9.- Champ de vitesse en mer du Nord à $t_{Gr} = 0$.

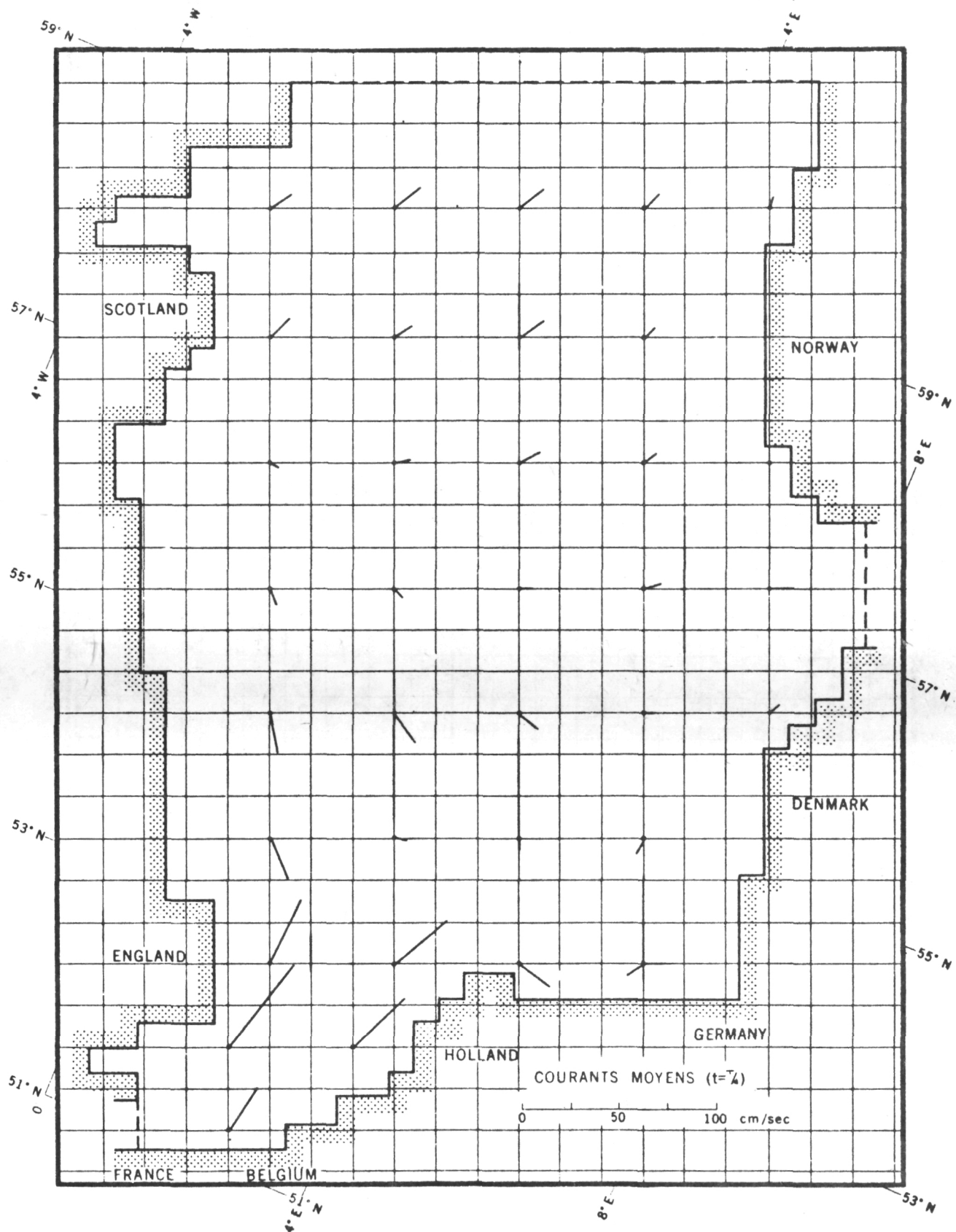


fig. 10.- Champ de vitesse en mer du Nord à $t_{Gr} = \frac{T}{4}$.

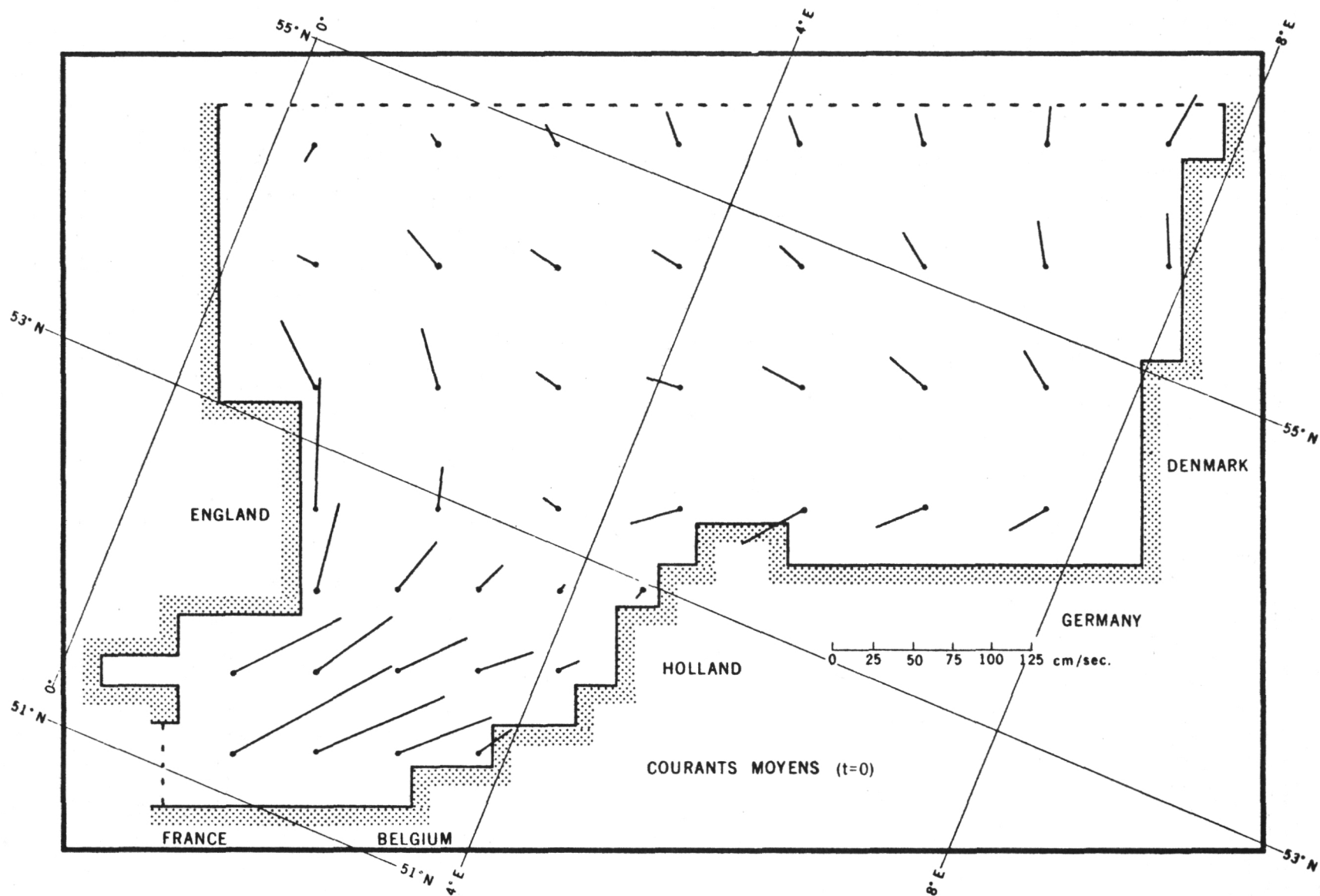


fig. 11.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = 0$ dans le Southern Bight.

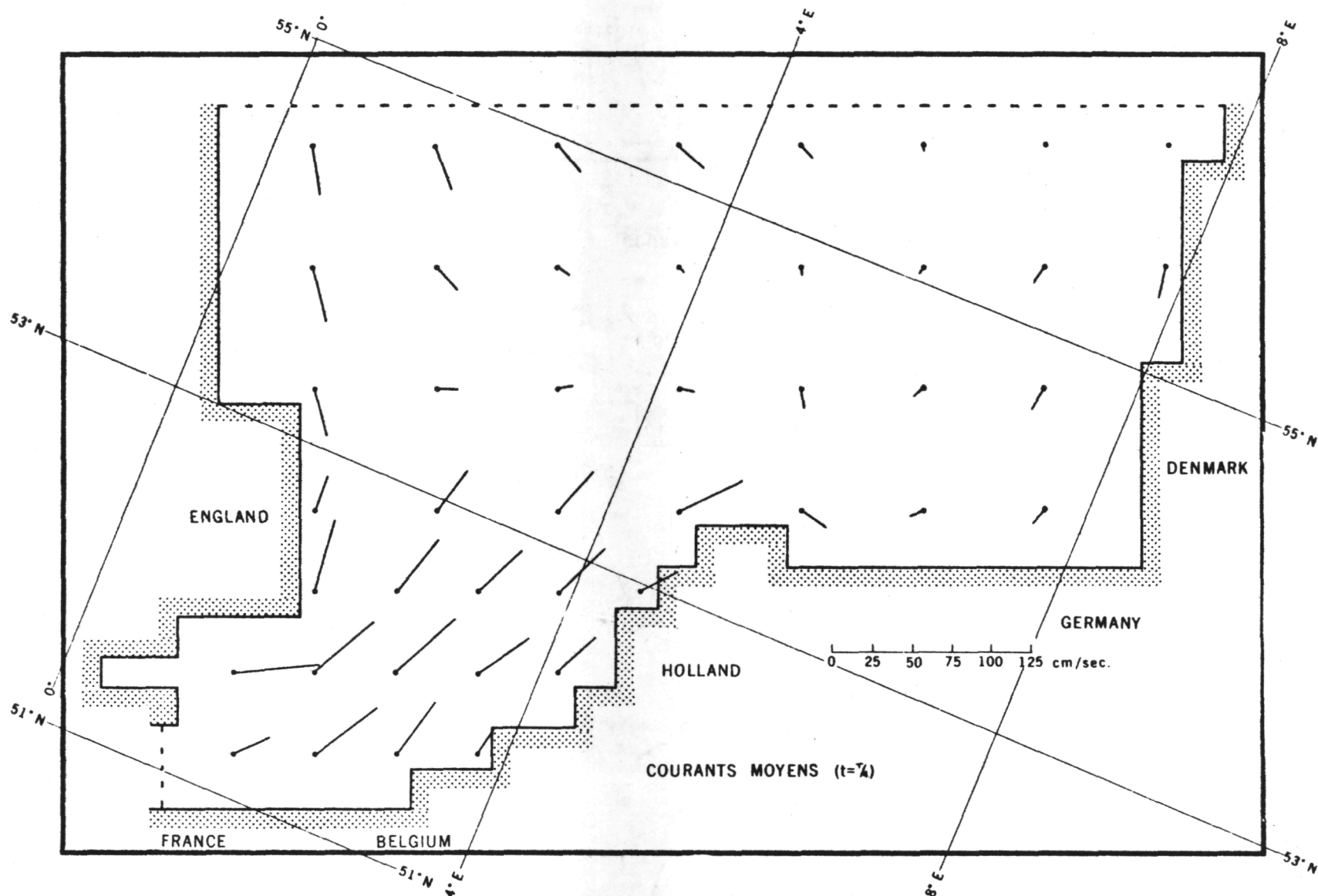


fig. 12.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = \frac{1}{4}$ dans le Southern Bight.

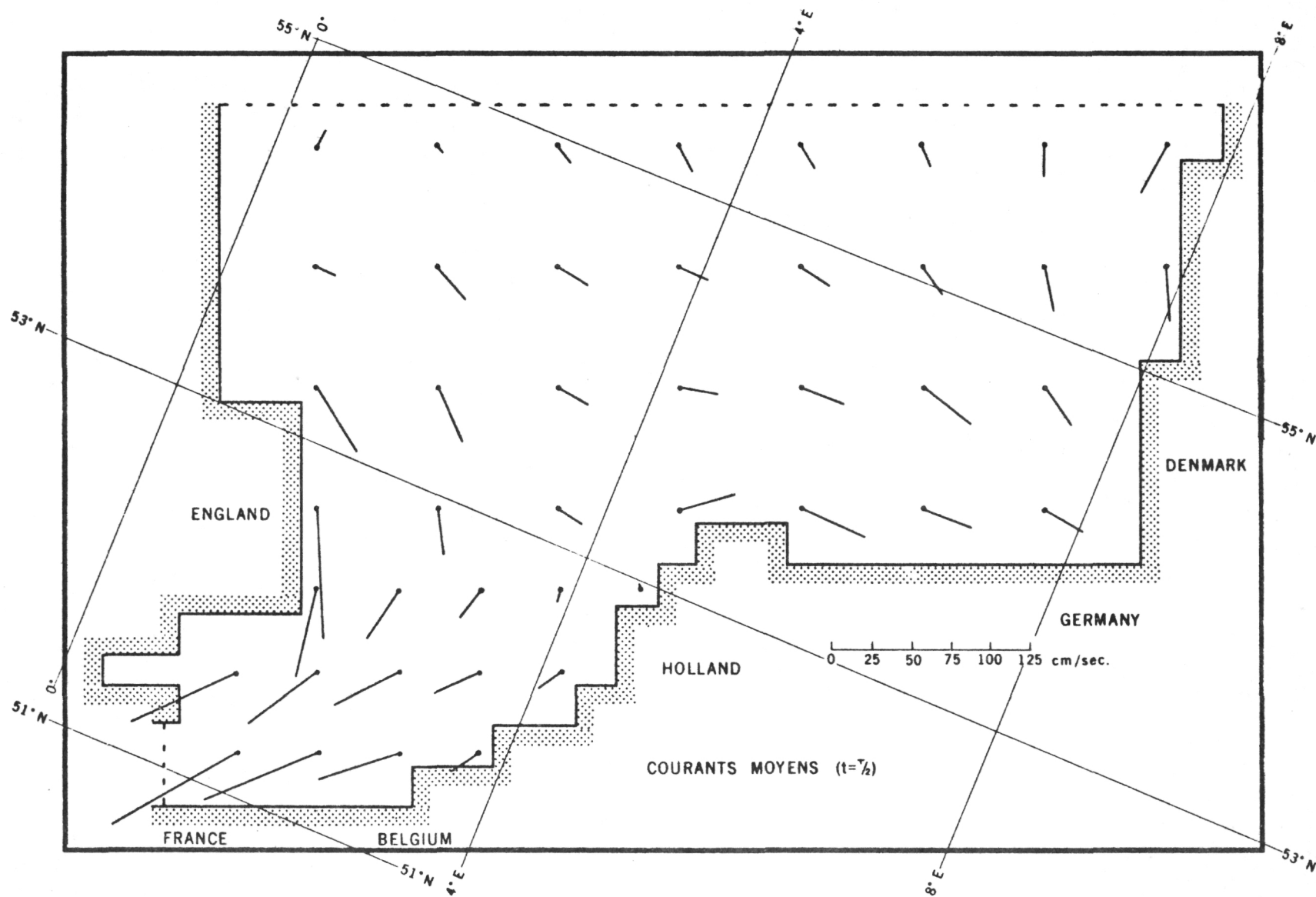


fig. 13.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight.

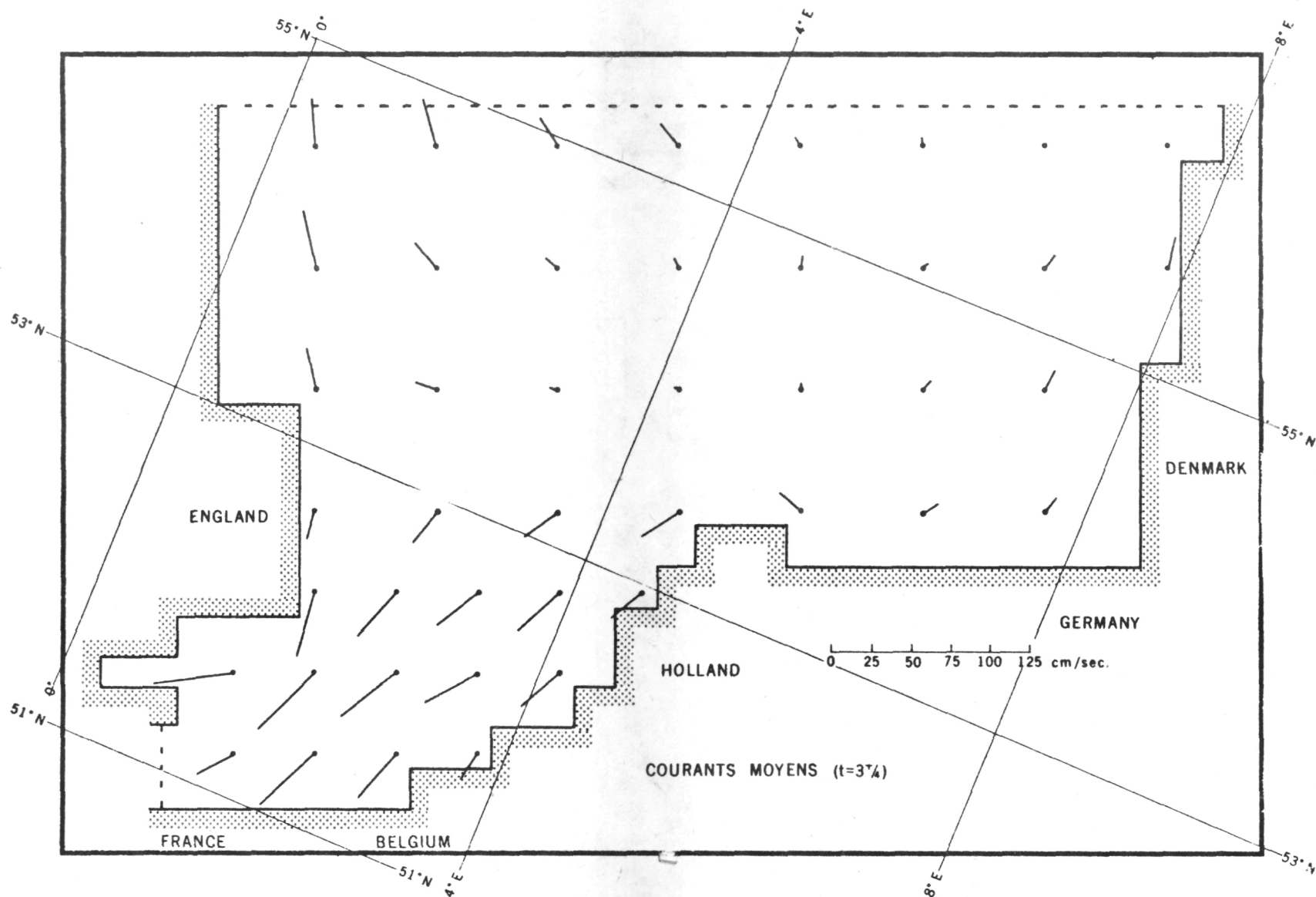


fig. 14.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = \frac{3T}{4}$ dans le Southern Bight.

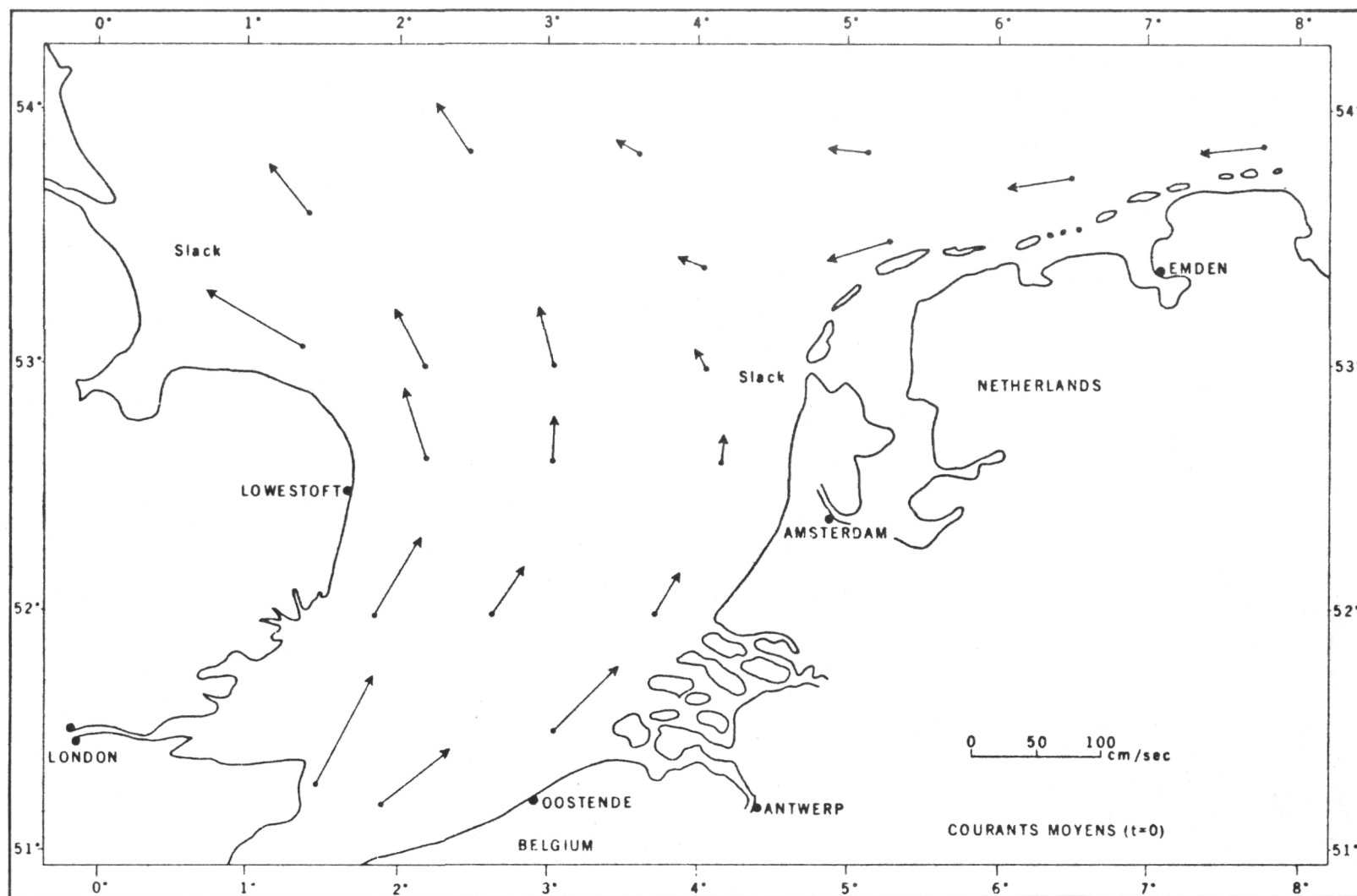


fig. 15.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = 0$ dans le Southern Bight.

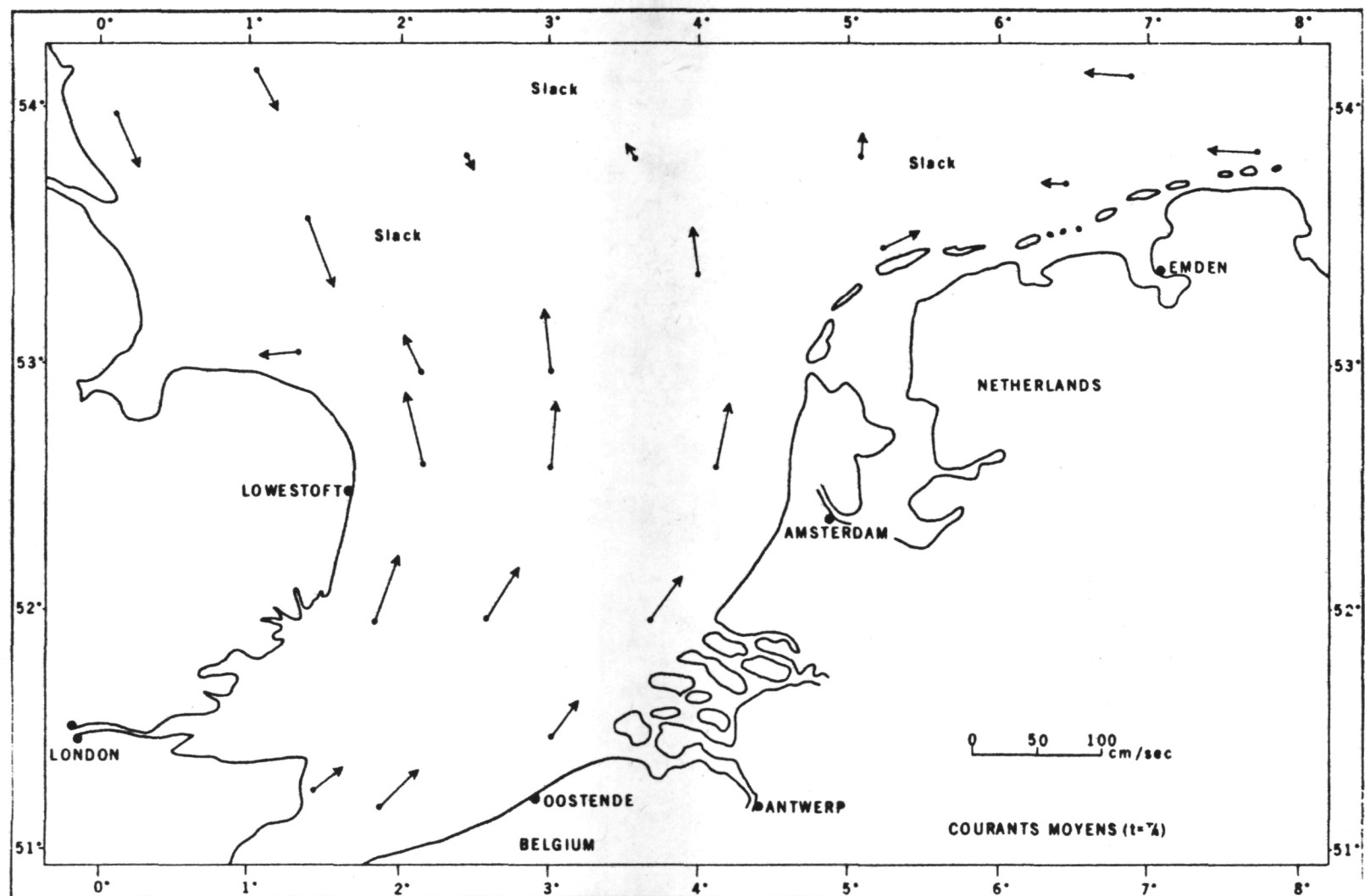


fig. 16.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{T}{4}$ dans le Southern Bight.

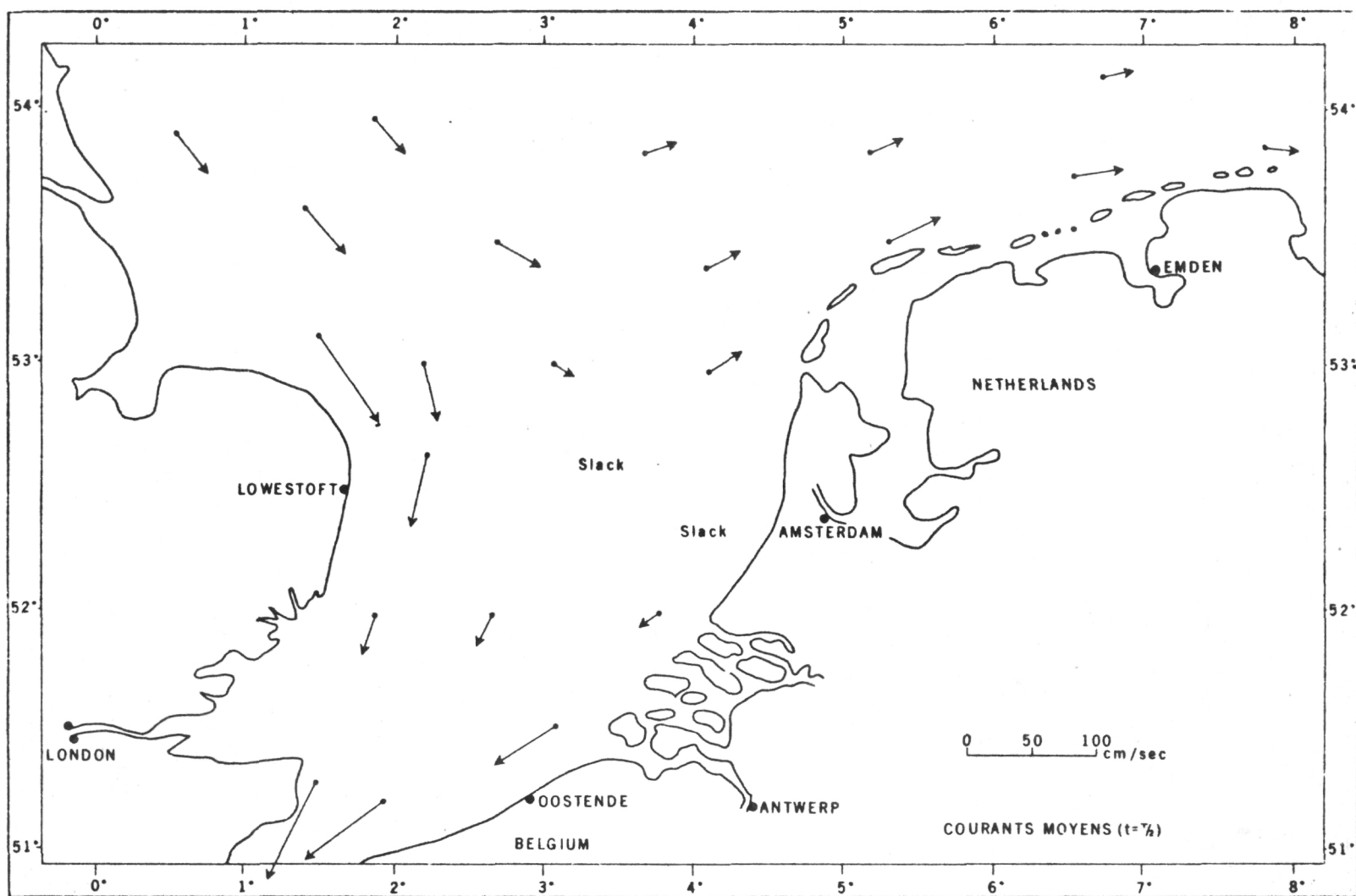


fig. 17.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight.

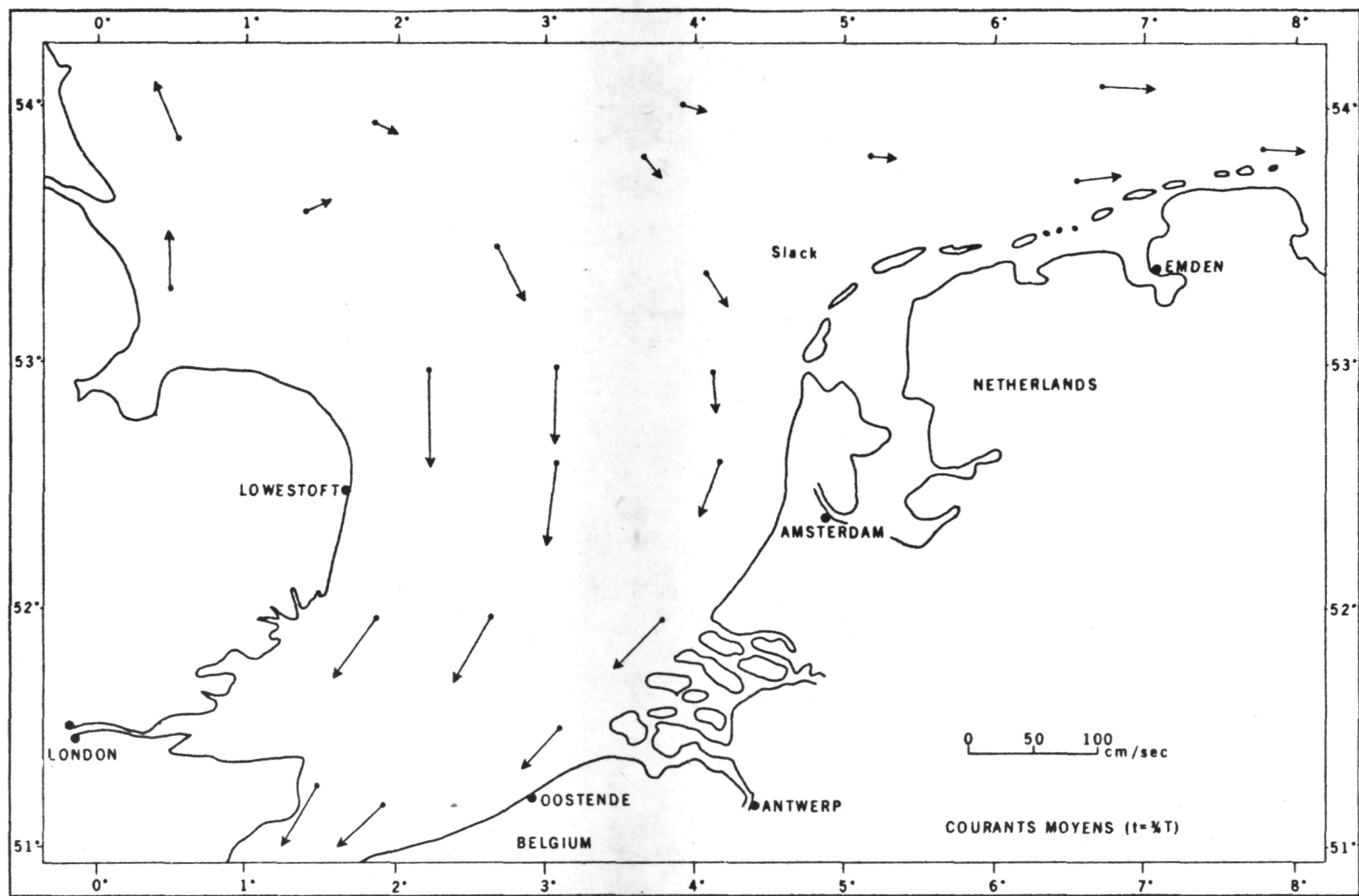


fig. 18.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{3I}{4}$ dans le Southern Bight.

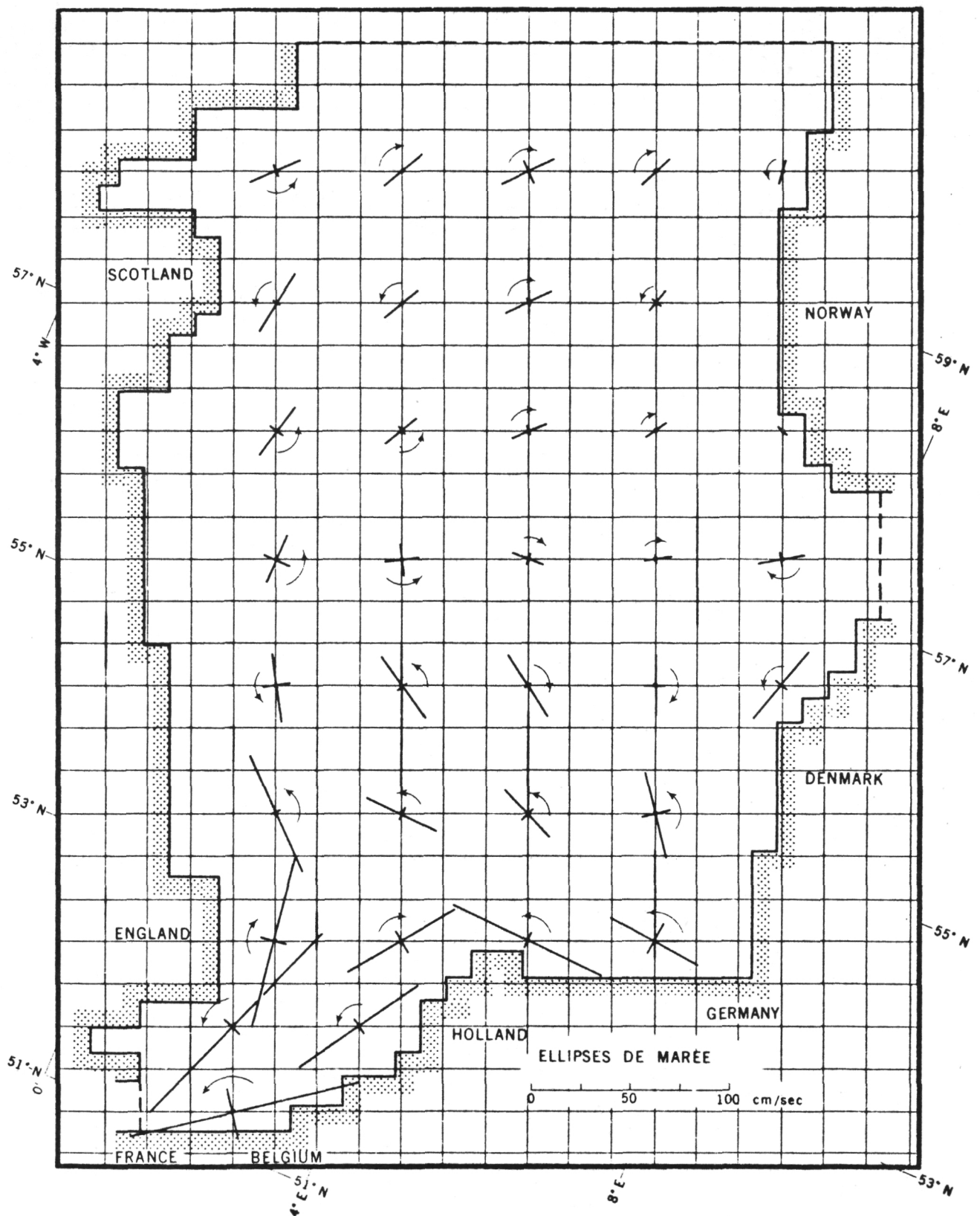


fig. 19.- Ellipses de marée en mer du Nord.

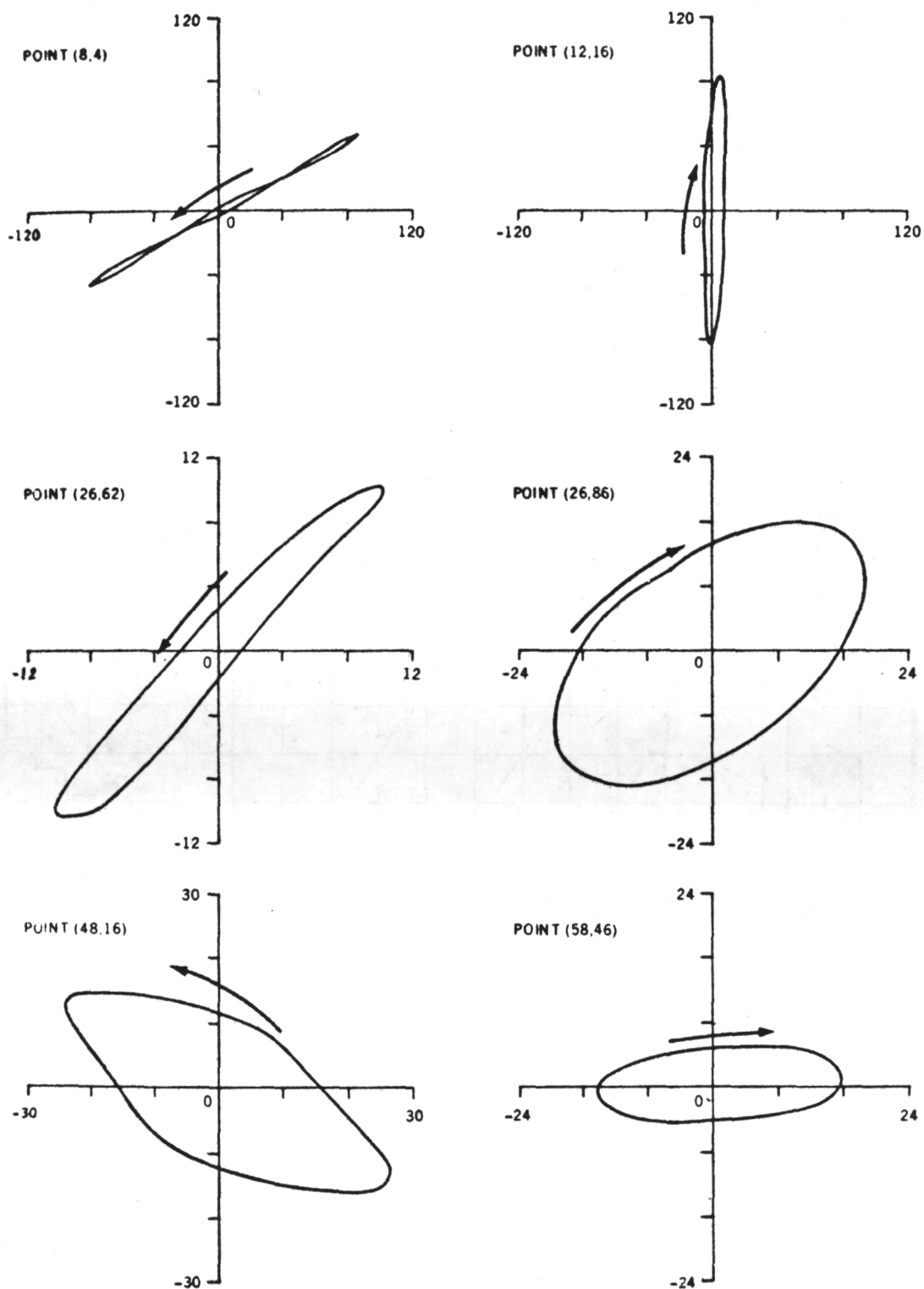


fig. 20.- Ellipses de marée en divers points choisis de la mer du Nord.

d'affilée nous fourniront des données précises permettant de tester le modèle. En possession de celles-ci, nous pourrions améliorer notre connaissance des courants en recherchant les coefficients de friction sur le fond, de viscosité turbulente et de profil vertical qui conduisent aux meilleurs résultats.

3.5.- Importance des termes non linéaires (fig. 21 à 23 et tableau 2)

Les termes non linéaires des équations de conservation de la masse et du moment compliquent fortement la résolution de ces équations. Beaucoup de chercheurs les ont négligés sans justification; nous avons, dans notre modèle, conservé tous les termes non linéaires et les figures 21 à 24 prouvent à suffisance l'importance des effets non linéaires dans les régions de basses profondeurs.

Les termes de friction

$$k \frac{v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(h + \zeta)^2} \quad \text{et} \quad k \frac{v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(h + \zeta)^2}$$

introduisent des harmoniques d'ordre 2 comme on pourrait le montrer analytiquement sur un exemple simple basé sur le système suivant [voir Dronkers (1964) par exemple] :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + A_h \nabla_h^2 U - k \frac{U |U|}{(h + \zeta)^2}$$

Les autres termes non linéaires des équations (4) et (5)

$$\frac{\lambda}{H} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + g\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$$

$$\text{et} \quad \frac{\lambda}{H} \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + g\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$$

sont à l'origine des harmoniques d'ordre 1 [Kreiss (1957)].

L'analyse des enregistrements de marée, dans les eaux peu profondes, montrent que l'harmonique la plus importante pour la marée partielle M_2 est M_4 c'est-à-dire l'harmonique d'ordre 1 ; même dans les cas les plus défavorables on a toujours :

$$\text{Elévation } (M_6) \leq 0,40 \text{ Elévation } (M_4) .$$

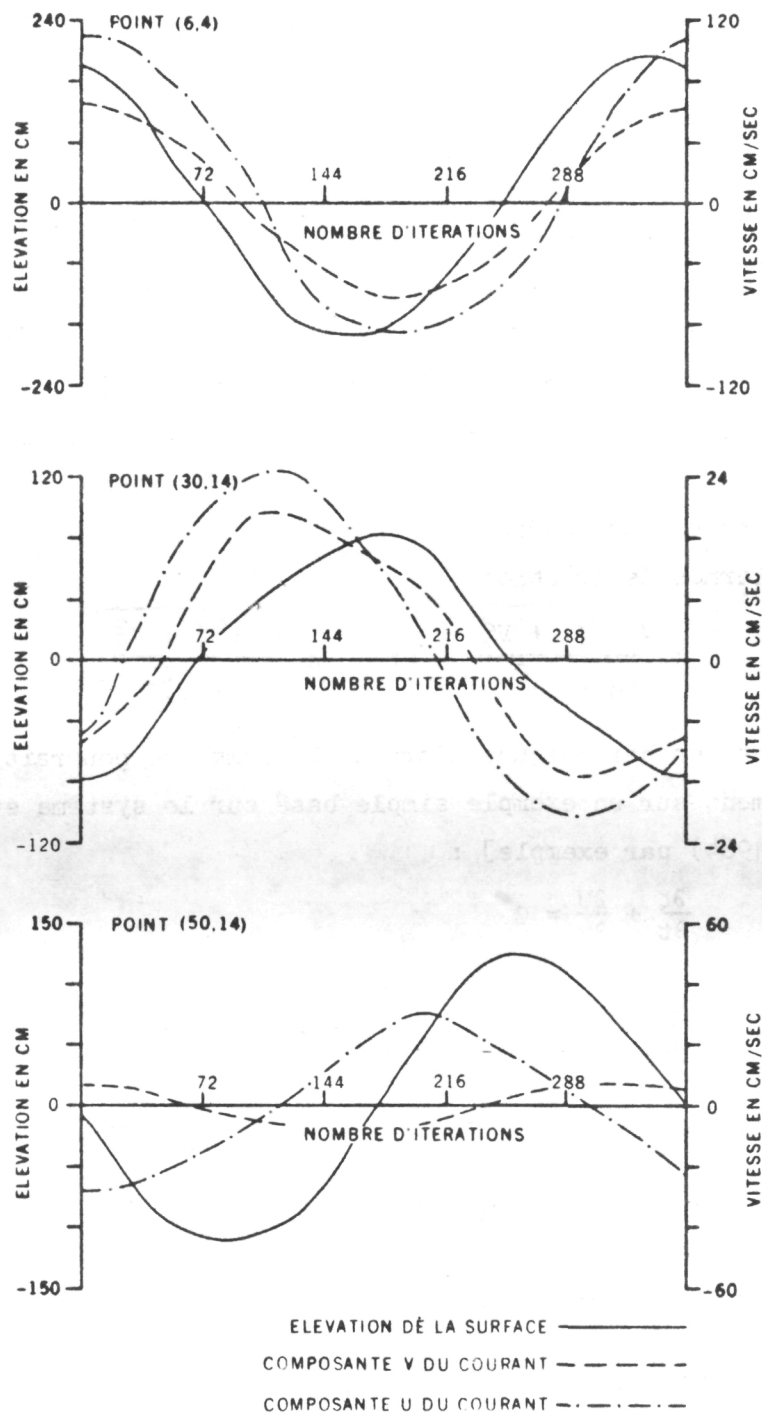


fig. 21.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface aux points (6,4) , (30,14) et (50,14).

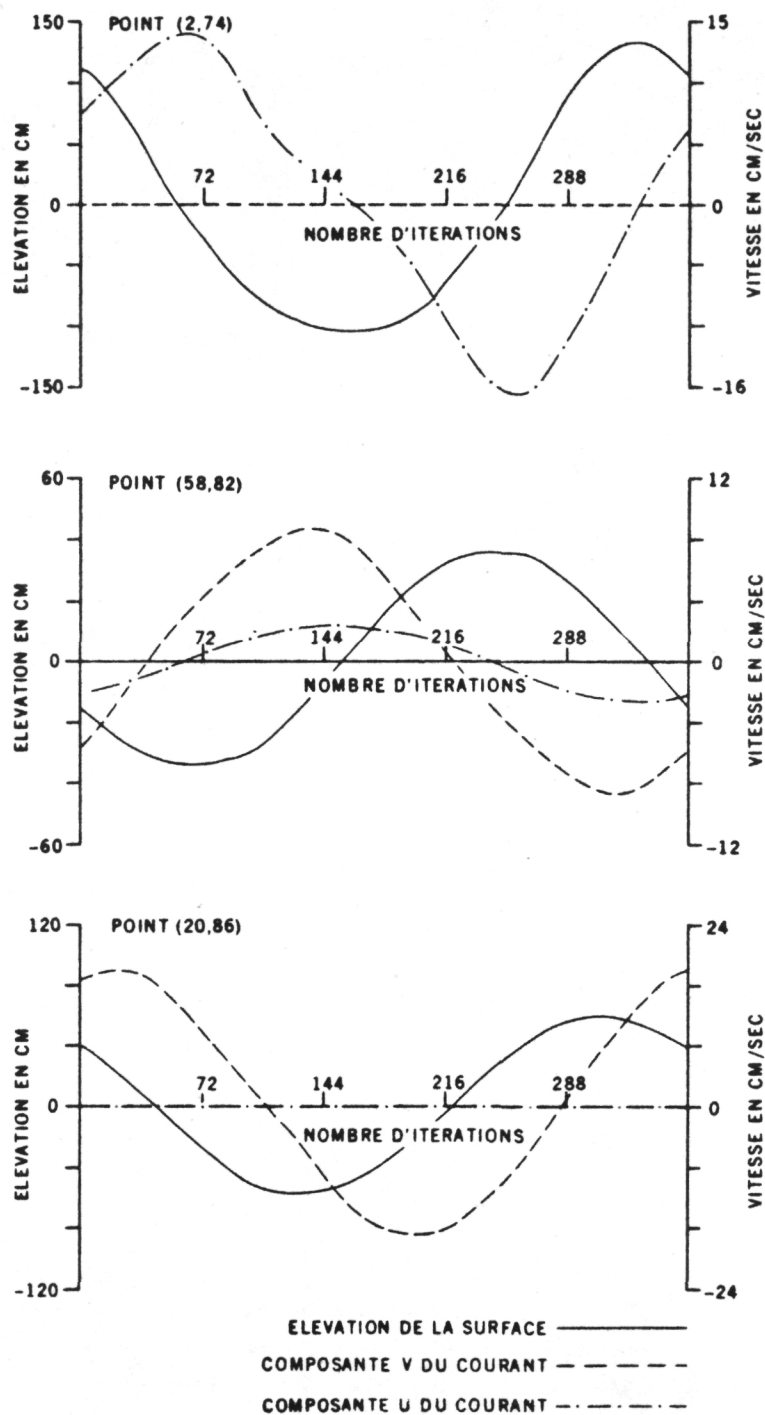


fig. 22.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface
aux points (2,74) , (58,82) et (20,86) .

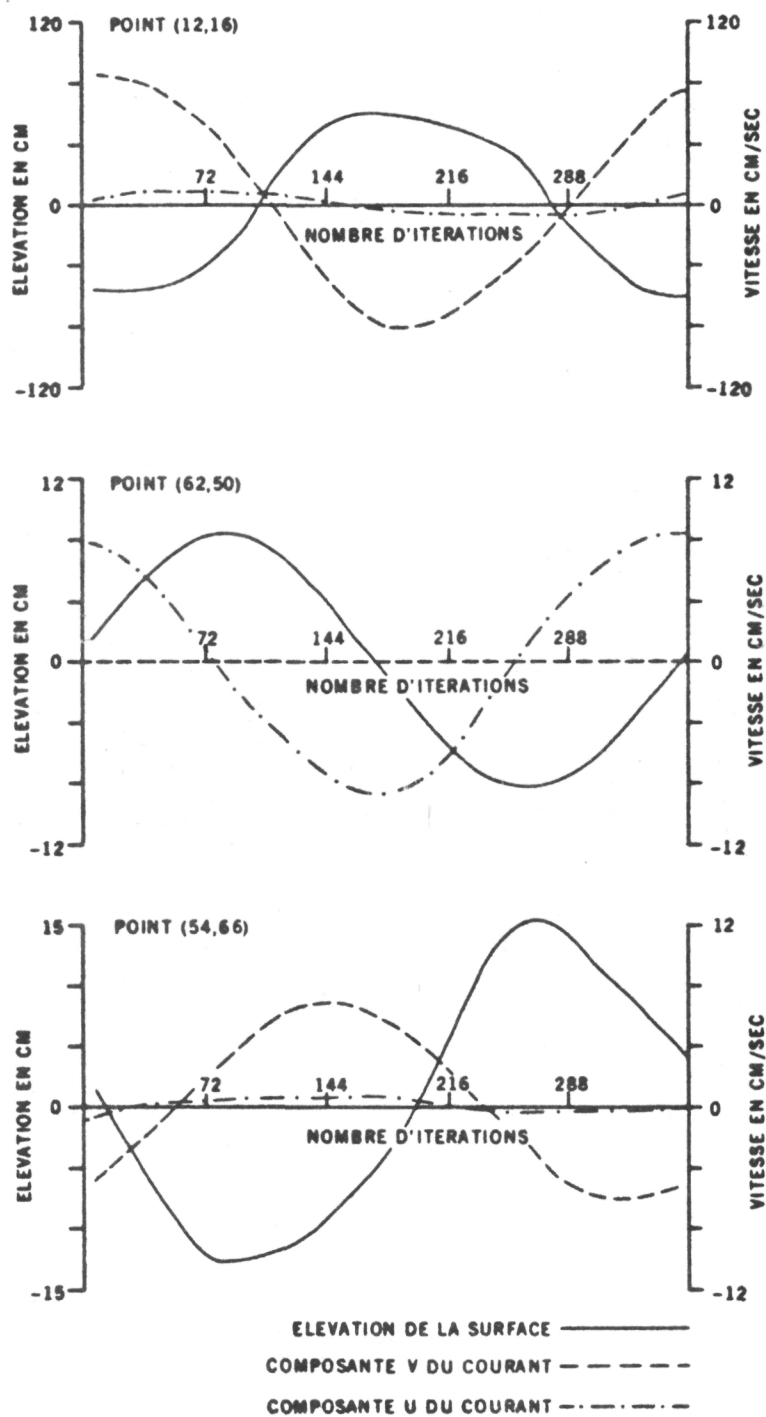


fig. 23.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface
aux points (12,16) , (62,50) et (54,66) .

Tableau 2

	Composante continue $\frac{M_0}{\Sigma}$ %	$\frac{M_2}{\Sigma}$ %	$\kappa_4 = \frac{M_4}{M_2}$ %	$\kappa_6 = \frac{M_6}{M_2}$ %	$\kappa_8 = \frac{M_8}{M_2}$ %	$\kappa_{10} = \frac{M_{10}}{M_2}$ %	Profondeur en mètres
(2,74)	1,2	87,5	5,0	3,0	-	-	35
(6,10)	4,0	85,9	2,5	2,8	1,0	-	10
(30,14)	0,5	90,3	-	5,0	0,3	0,6	19
(12,16)	1,3	86,4	1,4	8,2	-	0,3	15
(62,50)	0,2	94,4	-	-	-	-	150

avec $\Sigma = \sum_{i=0}^6 S_i$

où

- S_0 (composante continue)
- $S_1 = M_2$ [fondamental (marée semi-diurne lunaire)]
- $S_2 = M_4$ (première harmonique)
- $S_3 = M_6$ (deuxième harmonique)
- $S_4 = M_8$ (troisième harmonique)
- $S_5 = M_{10}$ (quatrième harmonique)
- $S_6 = M_{12}$ (cinquième harmonique) .

Il est donc apparu qu'il serait utile de faire une analyse de Fourier de la marée calculée afin d'étudier l'importance des termes non linéaires dans l'élévation de la surface et la distribution des harmoniques. Pour tester l'efficacité de la méthode numérique d'analyse de Fourier et estimer le bruit introduit, on a engendré une sinusoïde de fréquence égale à celle de la marée M_2 . Les résultats tabulés (tableau 2) sont des valeurs corrigées obtenues en soustrayant le bruit estimé du signal correspondant aux différentes harmoniques.

i) Au point (62,50) situé dans une région profonde ($h > 150$ m) et près d'une force excitatrice purement sinusoïdale, on obtient un signal quasi harmonique de période T_{M_2} . L'influence des termes non linéaires est donc très faible.

ii) Aux points (30,14) , (12,16) et (6,10) caractérisés par une très faible profondeur ($h < 20$ m) , on remarque que l'harmonique d'ordre 2 est plus importante que celle d'ordre 1 ce qui prouve que la friction joue le rôle le plus important dans ces régions. Suivant le déphasage des harmoniques M_4 et M_6 par rapport au fondamental M_2 les marées sont caractérisées par des variations temporelles différentes [points (30,14) et (12,16) aux figures 21 et 23].

iii) Dans les bassins de profondeurs moyennes, les termes M_4 et M_6 sont du même ordre de grandeur avec toutefois $M_4 > M_6$ [point (2,74)]. Les termes de friction et les autres termes non linéaires influencent donc de la même manière l'élévation de la surface.

L'harmonique M_6 est donc une harmonique créée en grande partie par le modèle mathématique par l'intermédiaire du terme de friction quadratique. Modifier la forme de ce terme et l'estimer par un terme linéaire diminuerait fortement M_6 mais renforcerait la part prise par le fondamental.

Conclusions

Tant que le terme de friction sera estimé par une relation quadratique (générateur de M_6) ou linéaire (renforcement de M_2), il sera impossible de calculer de façon tout à fait exacte l'élévation et le courant dus à la marée. Nous voyons donc que la formulation actuelle de la friction impose une limite à la précision des modèles mathématiques; mais à défaut de mieux nous nous contenterons de la relation quadratique pour estimer la friction sur le fond car elle semble conduire aux meilleurs résultats.

3.6.- Vitesse de phase et caractère de l'onde de marée (tableau 3 et fig. 7 et 8)

Le caractère de l'onde de marée peut être déterminé en comparant la vitesse de phase de l'onde réelle à celle donnée par la relation :

$$(12) \quad c = \sqrt{gh}$$

qui est la vitesse de propagation d'une onde monochromatique et monodirectionnelle. Nous avons recherché la vitesse de phase de l'onde réelle, le long des côtes de la mer du Nord, en nous servant des lignes cotidales

Tableau 3

	Vitesse de phase d'une onde progressive monodirectionnelle $c = \sqrt{gh}$ m/s	Vitesse de phase calculée à partir des lignes cotidiales	
		Calculée c_1 m/s	Observée c_2 m/s
Côte belgo-hollandaise (Dunkerque à Den Helder)	12,5	11	11,5
Deutsche Bucht	12,98	29	14,7
Côte norvégienne (Mandal à Stavanger)	31,11	12,2	11,4
Côte écossaise (Wick à Aberdeen)	22,89	30,6	24,5
Côte anglaise (Berwick à Whitby)	22,4	26,7	34,2
Côte du East Anglia (Lowestoft à Harwich)	15,22	6,64	11,5

données par les observations et le modèle (fig. 7 et 8). L'analyse du tableau 2 nous permet de tirer les conclusions suivantes :

i) Dans l'extrême sud de la mer du Nord, c'est-à-dire le long des côtes franco-belgo-hollandaises et des côtes est de l'Angleterre, les vitesses de phase observées et calculées sont comparables et sont inférieures à la vitesse c de l'onde unidirectionnelle. Ceci prouve que la marée est type progressif et unidimensionnel.

ii) Le long de la côte norvégienne, l'onde est aussi progressive et unidimensionnelle; la vitesse de phase est beaucoup plus faible que celle donnée par la relation (12). Ce fait peut s'expliquer par la difficulté de déterminer la profondeur h à introduire dans cette relation en raison de la forme particulière du Canal norvégien.

iii) Malgré les différences entre les vitesses c_1 et c_2 dans le *Deutsche Bucht*, dues aux imprécisions du modèle, on observe une vitesse de phase supérieure à celle donnée par la relation (12). L'onde de marée, dans cette région, résulte de la composition de deux ondes progressives, l'une provenant du Pas de Calais, l'autre de la frontière nord de la mer

du Nord. Un léger déphasage entre ces deux ondes peut provoquer des ondes secondaires se propageant à des vitesses de phase très grandes et une légère erreur dans le modèle explique les différences entre c_1 et c_2 .

iv) Dans le nord de la mer du Nord, les vitesses de phase c_1 et c_2 sont partout supérieures à la vitesse de phase c ; ceci veut dire que l'onde de marée est le résultat de l'interférence des ondes provenant de la marée de l'Atlantique et de la Manche. Le critère utilisé pour la détermination du caractère de l'onde ne peut être appliqué en toute rigueur en raison des dimensions trop importantes de l'ouverture nord de la mer du Nord et de la rotation de la terre.

4.- Conclusions

Dans ce travail, nous avons montré qu'il était possible de reproduire les marées avec précision. Les erreurs les plus importantes sont localisées le long des côtes anglaises et danoises en raison d'un lissage excessif que nous avons jugé nécessaire afin d'éviter les divergences numériques qui arrivent fréquemment dans ces régions de très basses profondeurs. Les résultats seront améliorés dans nos prochains travaux en diminuant le lissage au maximum mais tout en conservant un schéma numérique stable.

Les campagnes de mesures courantométriques projetées, tant par l'I.C.E.S. pour l'ensemble de la mer du Nord que par les autorités belges responsables du programme national sur l'environnement physique et biologique le long de leurs côtes, nous aideront à mieux connaître le champ de courant qui influence directement la dispersion d'un polluant par l'intermédiaire du *shear effect diffusivity*. Ces données seront de précieux outils pour tester la précision de nos modèles et permettront de les améliorer en recherchant d'une manière empirique d'abord théorique ensuite les coefficients de friction, de viscosité turbulente et de profil vertical du courant qui conduisent aux meilleurs résultats.

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans l'aide financière du Conseil des Arts du Canada que je tiens à remercier vivement.

Ma plus respectueuse gratitude va au Dr. N.J. Campbell, directeur du département des recherches océanographiques du Ministère de l'Environnement, qui m'a permis de venir étudier les techniques des modèles numériques à Ottawa.

Cette étude n'a pu être menée à son terme que grâce au dévouement des personnes suivantes à qui je désire exprimer ma plus vive gratitude :

- aux Dr. G. Godin et T. Murty ainsi qu'à Monsieur K. Yuen qui ont été mes guides tout le long de cette année et qui n'ont cessé de m'encourager par leurs nombreux conseils,
- à Monsieur F.G. Barber qui s'est chargé de résoudre toutes les questions relatives à l'édition de ce présent travail,
- à tous ceux qui, nombreux, à la Direction des Sciences de la Mer, ont pu m'aider.

Références

- BOWDEN (K.F.), (1965). Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, *J. Fluid. Mec.*, 21, 83-95.
- BOWDEN (K.F.), (1966). *Turbulence, in The Sea*, vol. I, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York.
- BRETTSCHNEIDER (G.), (1967). *Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens zur Ermittlung der M_2 - Mitschwingungsgezeit der Nordsee*, Met. Inst. Meeresk. Hamburg, N° 7.
- DEFANT (A.), (1961). *Physical Oceanography*, Pergamon Press, Oxford.
- DRONKERS (J.J.), (1964). *Tidal computations*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York.
- FISCHER (G.), (1959). Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, *Tellus*, XI, 1, 60-76.
- FISCHER (G.), (1965). A survey of finite-difference approximations to the primitive equations, *Monthly Weather Review*, vol. 93, 1, 1-10.
- HANSEN (W.), (1966). *The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical-numerical methods*, Tech. Report N° 25 of the N.A.T.O. Subcommittee on Oceanographic Research, Hamburg, December 1966.
- HARRIS (D.L.) and JELESNIANSKI (C.P.), (1965). Some problems involved in the numerical solutions of tidal hydraulics equations, *Monthly Weather Review*, vol. 92, 9, 409-422.
- KASAHARA (A.), (1965). On certain finite difference methods for fluid dynamics, *Monthly Weather Review*, vol. 93, 1, 27-31.
- KREISS (H.), (1957). Some remarks about nonlinear oscillations in tidal channels, *Tellus*, IX, 1, 53-68.
- LAX (P.D.) and WENDROFF (B.), (1960). Systems of conservation laws, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 217-237.
- Monaco Tables. Harmonics Constants, Special publication N° 26, Inter. Hydro. Bureau, Monaco.
- NIHOUL (J.C.J.), (1971). *Shear effect and eddy diffusivity*, Rapport de Synthèse, Programme national belge sur l'environnement physique et biologique, Journée d'étude des 24-25 novembre 1971.
- NIHOUL (J.C.J.), (1972). *Hydrodynamical and biochemical state variables and evolution equations for the mathematical modelling of sea pollution* in Proc. Liège Third Coll. on Ocean Hydrodynamics, Liège, May 3-8, 1971.

PROUDMAN (J.) and DOODSON (A.T.), (1924). The principal constituents of the tide of the North Sea, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 224, 185-219.

RONDAY (F.C.), (1971). *Etude de la dispersion d'un polluant en mer du Nord*, Programme national belge sur l'environnement physique et biologique, Report 4.

RONDAY (F.C.), (1972). *Modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord*, Environment Canada, Marine Sciences Branch, Manuscript Report Series, N° 27.

TALBOT (J.W.), (1970). *The influence of tides, waves and other factors on different rates in marine and coastal situations*, Proc. F.A.O. Technical Conference on Marine Pollution, Rome, December 9-18.

B.- CIRCULATION RESIDUELLE EN MER DU NORD

1.- Introduction

D'un point de vue théorique, la mer du Nord est suffisamment étendue pour que la rotation de la terre joue un rôle capital dans la distribution des courants. Par contre, ses dimensions ne sont pas assez grandes pour que la courbure de la terre et la variation du paramètre de Coriolis influencent de manière appréciable la dynamique des courants. Les sources primaires des courants sont les marées, les contraintes dues au vent et les gradients de densité. Comme l'objet de cette étude est de rechercher les courants caractérisés par une grande échelle de temps, les courants périodiques de marée ne seront pas pris en considération. Les gradients de densité seront négligés, la mer étant supposée homogène. Cette hypothèse est valable durant les mois d'hiver partout excepté dans le Skagerrak et le long de la côte norvégienne. A ces endroits, la solution obtenue par le modèle donnera un résultat approché qui, cependant, fera découvrir les traits caractéristiques de la circulation résiduelle.

De nombreux chercheurs — pour ne citer que les précurseurs, signalons Böhnecke (1922), Carruthers (1926) — ont abordé le problème de la circulation résiduelle d'une manière expérimentale. Les méthodes utilisées sont les suivantes : la méthode température-salinité [Böhnecke (1922)], la méthode lagrangienne [Carruthers (1926), Ramster (1965)] et la méthode eulérienne [Wyrki (1952), Veley (1960)]. Ces méthodes, qui ont rendu de nombreux services, ont plusieurs inconvénients inhérents : *e.g.* le nombre considérable de mesures qui doivent être effectuées sur l'ensemble de la zone à étudier pour obtenir des résultats statistiquement valables.

Les calculateurs numériques permettent maintenant de résoudre les équations de l'hydrodynamique. Hansen (1956, 1966) et Fischer (1959) ont calculé les lignes cotidales et d'égale amplitude; Hansen (1956, 1966) et Heaps (1969) ont poursuivi des recherches sur les tempêtes. L'élévation du niveau de la mer a pu être calculée avec une bonne précision. Quant à nous, nous calculerons la circulation résiduelle et montrerons l'influence de la bathymétrie du bassin sur la distribution horizontale des courants. Les faiblesses des modèles théoriques apparaîtront à la lumière de quelques exemples.

2.- Description du modèle mathématique

Puisque notre but est de rechercher la circulation résiduelle, qui est — par définition — ce qui reste dans la circulation lorsque les termes périodiques de marée ont été éliminés, l'hypothèse d'un état stationnaire sera faite. Nous ne nous intéresserons qu'à la circulation dans un sens synoptique; dans ce cas, nous pouvons, sans trop restreindre la généralité du problème, supposer une friction horizontale négligeable. Nous avons montré [Ronday (1972)] que les termes non linéaires peuvent être négligés. Dans ces conditions, les équations de conservation du moment et de la masse [e.g. Nihoul (1971, 1972)] s'écrivent

$$(1) \quad -fV = -h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + (\tau_{sx} - \tau_{bx})$$

$$(2) \quad +fU = -h \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + (\tau_{sy} - \tau_{by})$$

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\text{où} \quad U = \int_{-h}^{\zeta} \bar{V}_x \, dz \quad \text{et} \quad V = \int_{-h}^{\zeta} \bar{V}_y \, dz$$

sont les deux composantes de la vitesse intégrée du fond à la surface.

\bar{V}_x et \bar{V}_y sont définis [e.g. Nihoul (1971, 1972)] par

$$\bar{V}_i = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V_i \, dt \quad (i = 1, 2, 3)$$

où V_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse instantanée et T le temps caractéristique du phénomène à étudier (dans notre problème, T est supérieur aux périodes des marées diurnes et semi-diurnes), h est la profondeur moyenne de la mer, ζ sa déviation par rapport à la moyenne, g l'accélération due à la gravité et f le paramètre de Coriolis.

τ_s représente la contrainte de surface due au vent. La relation utilisée est la relation empirique classique

$$(4) \quad \tau_s = \rho_a c_d |W| W$$

où ρ_a et W sont respectivement la densité de l'air et la vitesse du vent à la hauteur anémométrique. c_d est un coefficient de proportionnalité qui dépend de nombreux paramètres (vitesse du vent, température,

stabilité de la couche d'air, etc.). Wilson (1960) a calculé le coefficient c_d le mieux adapté pour des vents faibles ($1 < W \leq 10$ m/s) et sa déviation standard.

$$(5) \quad c_d = 1,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg} \quad , \quad \sigma_{c_d} = 0,83 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg} \quad .$$

Ce coefficient c_d est entaché d'une grande incertitude; nous nous contenterons de cette valeur à défaut de mieux.

Bowden (1953), Groen et Groves (1966), Weenink (1958) ont montré que la contrainte sur le fond se compose de deux termes dont l'un est proportionnel à la contrainte de surface et dont l'autre ne dépend que de la vitesse intégrée du fluide.

$$(6) \quad \tau_b = -m \tau_s + \tau_b^{(1)} \quad .$$

En accord avec Weenink (1958), nous avons choisi $m = 0,12$. Lorsque le courant de dérive se superpose à un courant de marée intense, ce qui est le cas en mer du Nord, la contrainte sur le fond $\tau_b^{(1)}$ s'exprime [Bowden (1956), Roday (1971)] par

$$(7) \quad \tau_b^{(1)} = K \frac{U}{h}$$

où K est le coefficient de friction efficace. Roday (1972) a montré que le coefficient le mieux adapté à la circulation résiduelle en mer du Nord vaut $K = 0,00125$ m/s.

Dans ces conditions, les termes d'interaction aux frontières fond et surface s'écrivent :

$$(8) \quad \begin{aligned} \tau_{s_x} - \tau_{b_x} &= (1+m)\rho_a c_d |W| W_x - K \frac{U}{h} \\ \tau_{s_y} - \tau_{b_y} &= (1+m)\rho_a c_d |W| W_y - K \frac{V}{h} \end{aligned}$$

Une fonction de courant ψ peut être définie à partir de l'équation (3) :

$$(9) \quad U = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad .$$

Éliminons U et V entre (1) et (2) à l'aide de la relation (9). L'équation régissant ψ s'écrit

$$(10) \quad \frac{K}{h} \nabla^2 \psi + \left(-\frac{2K}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(-\frac{2K}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{f}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ = \tau_c - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \tau_{s_y}^* - \frac{\partial h}{\partial y} \tau_{s_x}^* \right)$$

où i) $\tau_s^* \equiv (1 + m) \tau_s$

représente la contrainte apparente de surface;

ii) $\tau_c = (\nabla \wedge \tau_s^*)_z$.

La fonction de courant doit satisfaire à des conditions aux limites :

i) le long d'une côte $\psi = C^{te}$;

ii) le long d'une frontière ouverte $\psi = \psi(s)$ où s est la coordonnée curviligne de la frontière ouverte.

Les forces excitatrices apparaissent dans le deuxième membre de l'équation (10). Le premier terme de droite, qui ne dépend que du vent, est le responsable d'une partie du transport : le transport dû au rotationnel (ψ_{rot}) . Au terme $(\nabla h \wedge \tau_s^*)_z$ de (10) correspondra un transport dû à la pente du fond (ψ_{pent}) . Murty et Taylor (1970) ont montré que ce dernier terme joue un rôle déterminant dans la circulation des Grands Lacs. Il existe encore une composante de transport qui provient des sources externes (rivières, fleuves, transport dû à une circulation générale, c'est-à-dire l'influence du courant Nord Atlantique dans la mer du Nord); on en tient compte en prescrivant de manière adéquate les conditions aux limites.

$$\psi = \psi_{rot} + \psi_{pente} + \psi_{ext}.$$

La méthode de relaxation forcée de Liebman [*e.g.* Murty et Taylor (1970)] a été utilisée pour résoudre l'équation différentielle partielle (10) qui est du type elliptique. La principale difficulté dans toute méthode itérative est d'obtenir un schéma convergent; pour cette raison, il a été nécessaire de lisser les profondeurs.

3.- Description du modèle physique

3.1.- Considérations générales

La méthode aux différences finies découpe le milieu en diverses cellules de profondeur constante (fig. 1). Lorsqu'on rencontre, comme en mer du Nord, deux bassins aux profondeurs très différentes, la méthode de relaxation exige un grillage très fin afin d'éviter les divergences. Comme la capacité des calculateurs est limitée, nous avons choisi une solution de compromis : maillage moyen ($\Delta x = \Delta y = 22.972$ mètres) et lissage des profondeurs pour éviter les divergences. L'opérateur de lissage est le suivant :

$$\bar{h}_{I,J} = \frac{h_{I,J+1} + h_{I,J-1} + h_{I+1,J} + h_{I-1,J} + 4 h_{I,J}}{8} .$$

Ce lissage laisse relativement inaffecté les régions de faible gradient de profondeur; par contre, il influence fortement la bathymétrie de la région norvégienne et les zones de basse profondeur. Nous verrons dans la suite qu'il est le responsable de l'atténuation de la structure des courants de dimensions supérieures à celles de la maille.

3.2.- Estimation des flux aux frontières ouvertes

Böhnecke (1922) a déduit les courants résiduels des cartes montrant la distribution des isohalines et isothermes moyennes. Laevastu (1963) a estimé, en se basant sur les données de Böhnecke et sur d'autres plus récentes, les flux moyens sur l'année à travers les diverses frontières ouvertes. Il a obtenu :

- comme flux entrant

1.800 km³/an au Dover Straits,
200 km³/an au Skagerrak,
20.000 km³/an à la frontière nord de la mer du Nord, côté
des îles Orkneys et Shetland;

- comme flux sortant

22.000 km³/an à la frontière nord dans la région proche de
la côte norvégienne.

Bien que les observations de température et de salinité montrent qu'il existe des fluctuations dans le transport durant l'année et même d'années en années, nous supposons - dans cette première étude - une

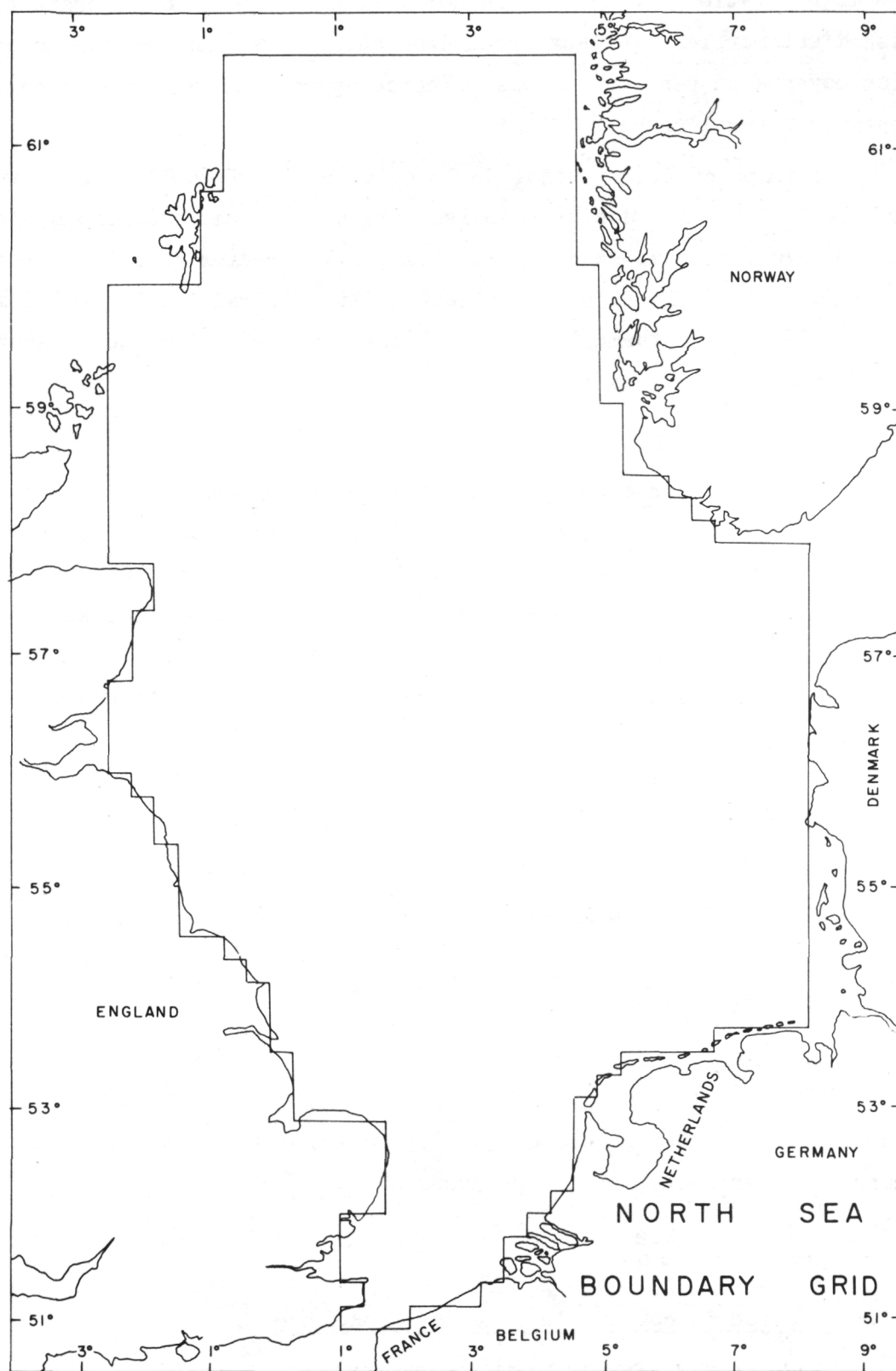


fig. 1.- Maille utilisée.

dynamique stationnaire durant le mois. Il est apparu qu'il serait plus aisé d'estimer les flux aux frontières ouvertes en janvier car la direction moyenne du vent en ce mois coïncide approximativement avec celle du vent moyen sur l'année.

Le temps caractéristique de la circulation résiduelle est beaucoup plus grand que celui des principales marées; dans ces conditions, le courant résiduel se compose de trois termes : le premier dû au vent local, le second qui résulte d'une circulation plus générale et le troisième qui provient des déformations des ellipses de marée et des composantes à long terme des marées :

$$(11) \quad \bar{V} = \bar{V}_{loc} + \bar{V}_{gén} + \bar{V}_{marée} .$$

Le dernier terme de (11) ne prend de l'importance que dans les régions peu profondes. Nous avons pu estimer la part prise par le terme $\bar{V}_{marée}$ dans le courant existant au Dover Straits. Veley (1960) a calculé au bateau phare *Varne* le courant de base qui se compose des deux derniers termes de la relation (11) : il vaut $2,97 \cdot 10^{-2}$ m/s . Quand le vent souffle de manière uniforme sur une région suffisamment étendue, Weenink (1958) estime

$$|\bar{V}_{gén}| \sim 0,20 |\bar{V}_{loc}| ;$$

alors la composante $|\bar{V}_{marée}|$, si on considère un vent uniforme de 4,3 m/s (vent moyen sur l'année), prend comme valeur $1,74 \cdot 10^{-2}$ m/s qui est faible comparée à celle des composantes dues au vent. Dans ces conditions, nous supposerons, en première approximation, que les flux aux frontières ouvertes obéissent à la relation suivante :

$$\frac{\phi_{janv,Dover}}{\phi_{année,Dover}} = \frac{\phi_{janv,Skag}}{\phi_{année,Skag}} = \frac{\phi_{janv,Nord,Ent}}{\phi_{année,Nord,Ent}} = \frac{\phi_{janv,Nord,Sort}}{\phi_{année,Nord,Sort}} = R .$$

A partir des données de Bowden (1956), nous avons pu calculer le premier membre et, par suite, R . Nous avons obtenu

$$(12) \quad R = 4,2 .$$

3.3.- Fonction de courant le long des frontières

On tiendra compte de l'apport des fleuves en déterminant de manière adéquate la fonction de courant aux frontières. Dans cette première étude, nous supposerons que le débit des fleuves en janvier (avant la fonte des

neiges) est identique à celui de l'été; ainsi nous pourrions utiliser les données fournies par Otto (1970).

En supposant une répartition uniforme du flux aux frontières ouvertes [Ronday (1972)], la fonction de courant est définie comme suit :

- 1) le long de la côte anglaise depuis la frontière N-O du modèle jusqu'à Dover $\psi = 0 \text{ m}^3/\text{s}$;
- 2) à travers le Dover Straits
de $\psi = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ à Dover
à $\psi = 240 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ à Calais;
- 3) de Calais à Vlessingen $\psi = 240 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$;
- 4) de Hoek van Holland à Cuxhaven $\psi = 242 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$;
- 5) de Cuxhaven à la frontière sud du Skagerrak $\psi = 243 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$;
- 6) à travers le Skagerrak
de $\psi = 243 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ au sud
à $\psi = 270 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ au nord;
- 7) le long de la côte norvégienne jusqu'à la frontière N-E du modèle
 $\psi = 270 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$;
- 8) à travers la frontière nord
 - i) de $\psi = 270 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ à la côte norvégienne
à $\psi = - 2.918 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'endroit de profondeur $h = 225 \text{ m}$
 - ii) de $\psi = - 2.918 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'endroit de profondeur $h = 225 \text{ m}$
à $\psi = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ à la frontière N-O du modèle.

3.4.- Contrainte apparente en surface

Etant donné que nous nous sommes donné pour but de faire ressortir les caractéristiques générales de la circulation résiduelle en janvier, nous supposerons une distribution de vent uniforme sur toute l'étendue du bassin, ce qui est une bonne approximation si on considère la carte des pressions moyennes du mois de janvier (fig. 2).

Le terme $(\nabla \wedge \tau_s^*)_z$ de l'équation (10) s'annule donc, et le transport de fluide que l'on obtiendra dans la suite ne dépend que de l'interaction vent-bathymétrie par l'intermédiaire de $(\nabla h \wedge \tau_s^*)_z$.

L'analyse des roses des vents a donné un vent du S-W d'une intensité de 7,79 m/s. Introduisant la vitesse du vent obtenue et la valeur du

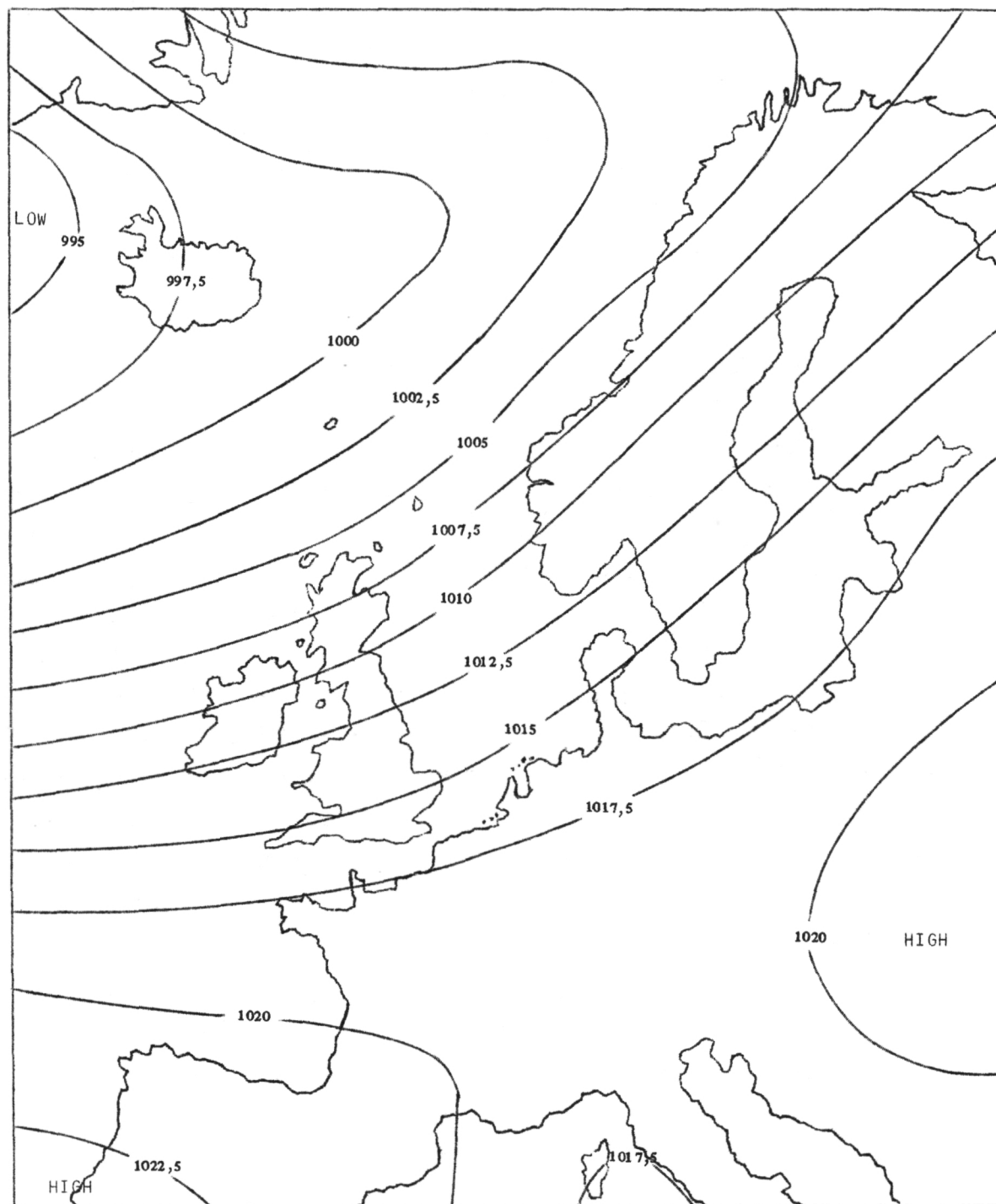


fig. 2.- Pressions atmosphériques moyennes en janvier (en mb) - Extraite de Lumb (1963).

coefficient de friction donné par la relation (5) dans (10), on obtient :

$$\|\tau_s^*\| = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Les deux composantes de la contrainte valent

$$\tau_{s_x}^* = \tau_{s_y}^* = 0,707 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

4.- Discussion des résultats

4.1.- Comparaison des résultats obtenus par le modèle mathématique et par les observations de Böhnecke et Laevastu (fig. 3 et 4)

Si on compare les figures 3 et 4 qui correspondent aux résultats obtenus respectivement par les méthodes mathématiques et expérimentales, on remarque immédiatement un accord satisfaisant entre celles-ci. Evidemment avec le modèle mathématique utilisé, il n'est pas possible de rendre compte de toutes les caractéristiques de la circulation et particulièrement les détails à petite échelle.

Nous avons repris la figure 4 de Laevastu (1963) représentant la distribution des différentes masses d'eau qui sont caractérisées par leur salinité, température et origine. La figure 3 montre trois caractéristiques de circulation qui correspondent aux

1) eaux de l'Atlantique Nord

L'aire comprise entre les lignes de courant $\psi = 0$ et $\psi = -10^5 \text{ m}^3/\text{s}$ qui s'étend de la frontière nord jusqu'au 56^{ème} parallèle correspond à la langue d'eau atlantique (région 1 de Laevastu).

2) eaux du Skagerrak

La région 3 de Laevastu apparaît clairement sur la figure 3; elle correspond à l'aire comprise entre la ligne de courant $\psi = -3 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{s}$ et la côte norvégienne. La concentration des lignes de courant en cette région s'explique par la grande profondeur.

3) eaux du Dover Straits

La ligne $\psi = 10^5 \text{ m}^3/\text{s}$ peut être considérée comme une frontière entre les eaux venant du nord de l'Atlantique Nord et celles qui proviennent du Dover Straits. La zone comprise entre cette ligne de courant et la côte qui s'étend du Pas de Calais jusqu'au parallèle 56°30 N correspond aux régions 2 et 6 de Laevastu.

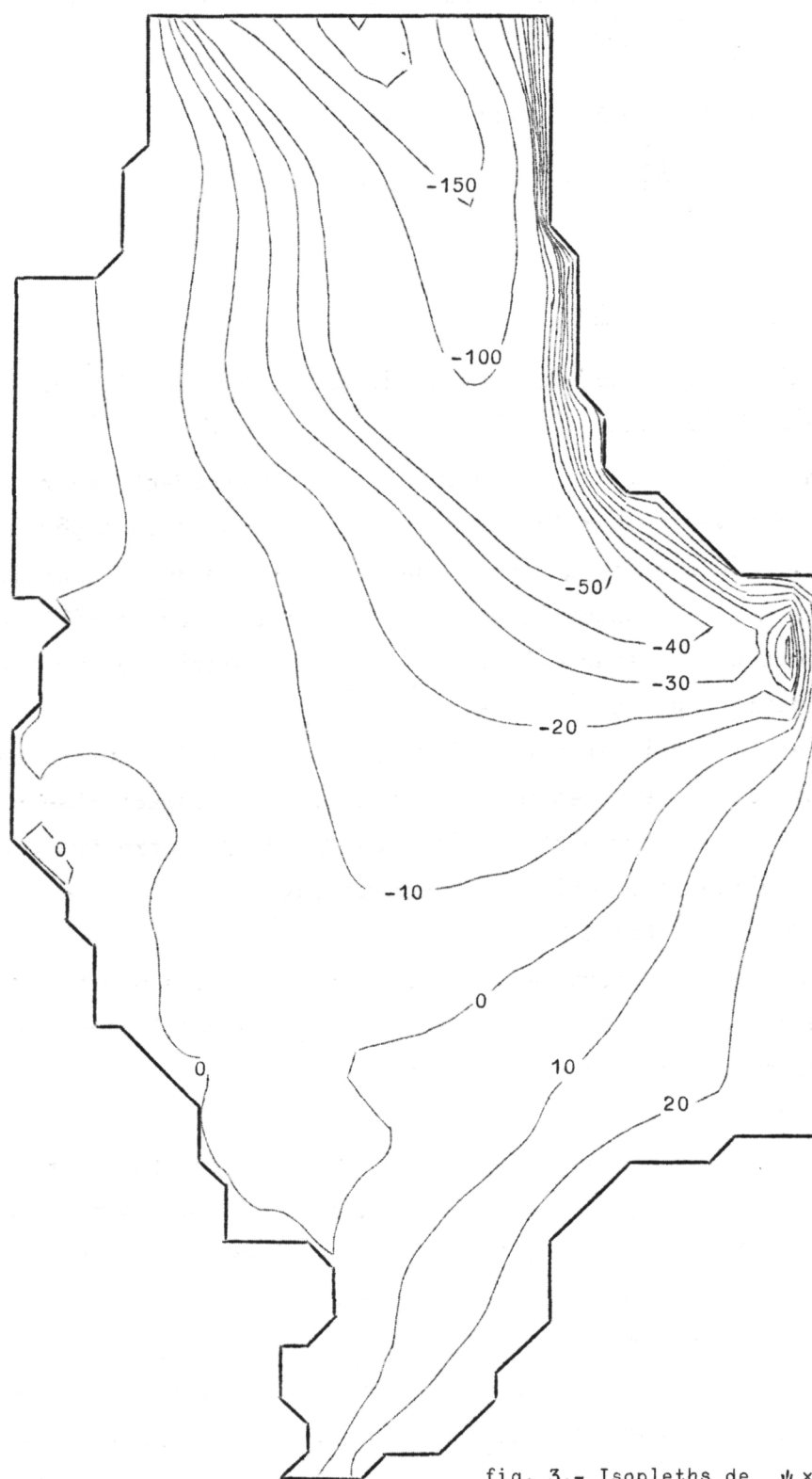


fig. 3.- Isopleths de $\psi \times 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ en janvier;
 $K = 0,00125 \text{ m/s}$;
 $\tau_{sx}^* = \tau_{sy}^* = 0,707 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$.

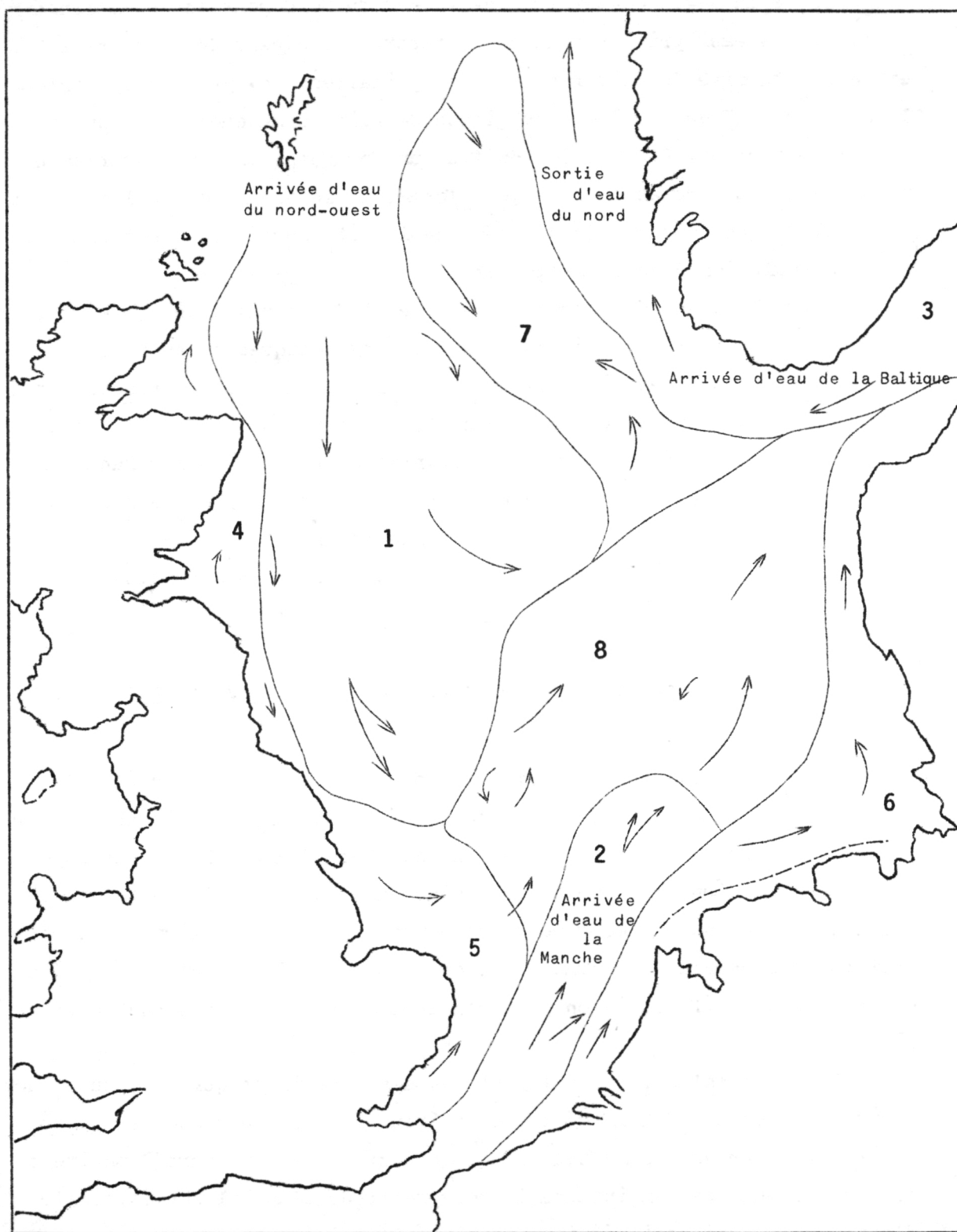


fig. 4.- Masses d'eau en mer du Nord (extraite de Laevastu, 1963).

Toute la région intérieure de la mer du Nord contient un mélange de ces trois eaux primaires dans un rapport qui dépend de la proximité et de l'intensité des diverses sources primaires. Le gyre anticyclonique localisé au S-E de la côte norvégienne devrait normalement se trouver dans le Skagerrak. L'hypothèse du flux uniforme sortant du Skagerrak est responsable du gyre et de l'image déformée de la situation réelle en cet endroit. Ce que nous obtenons au S-E de la côte norvégienne est un résumé de la circulation dans le Skagerrak.

Entre la ligne de courant $\psi = 0$ et la côte anglaise ($\psi = 0$), il existe une zone caractérisée par des gyres cycloniques ou anticycloniques dûs à la structure des côtes (zone 4 de Laevastu). Le rebroussement des eaux atlantiques obtenu par Böhnecke (1922) et Laevastu (1963) situé au S-O de la côte norvégienne et la circulation autour du Dogger Bank sont également retrouvés. Nous montrerons dans la suite que ces deux traits caractéristiques sont dus à la topographie irrégulière du fond.

En conclusion, l'accord est satisfaisant entre nos résultats et ceux de Böhnecke et Laevastu.

4.2.- Notre modèle et le champ de courant obtenu par les *Bottle drifters* (fig. 3 et 5)

Le laboratoire des pêcheries de Lowestoft [e.g. Ramster (1965)] a utilisé de manière intensive la méthode des "bouteilles dérivantes" pour étudier les courants résiduels dans la Southern Bight. Elle a permis de rendre compte d'un grand nombre de phénomènes, par exemple montrer l'influence du vent sur le mouvement des bouteilles et de confirmer les résultats de Böhnecke et Laevastu. Si on compare nos résultats (fig. 3) à ceux de Ramster (fig. 5), on peut conclure à un accord raisonnable entre les deux méthodes.

Le principal défaut de la méthode des bouteilles qui a rendu de nombreux services est son imprécision inhérente. Ne donnant que les points de départ et d'arrivée de la bouteille, on détruit la structure à petite et moyenne échelle car on intègre le mouvement; de plus, il est difficile d'estimer la durée d'immersion des bouteilles.

Le modèle mathématique détruit lui aussi tous les détails de circulation de dimensions inférieures à celles de la maille en raison de la

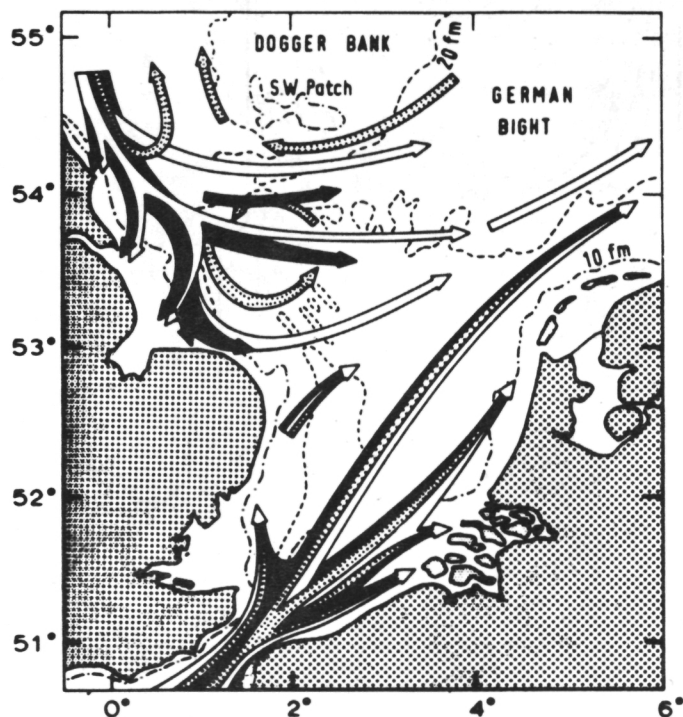


fig. 5.- Distribution des courants de fond dans le sud de la mer du Nord en 1960-1961, déduite des retours des Woodhead seabed drifters. (extraite de Ramster, 1965)

 début de l'été
  fin de l'été
  hiver

discrétisation et il atténue ceux de dimensions supérieures par le lissage des profondeurs rendu nécessaire pour obtenir un schéma convergent. L'utilisation d'une grille fine pour l'étude détaillée d'une région donnée permet d'allier précision des résultats et économie de mémoire quand une grille à larges mailles donne les conditions aux frontières de la grille fine.

4.3.- Influence de la topographie du fond (fig. 3 et 6)

Un des buts importants de cette étude est de démontrer l'influence prépondérante de la structure irrégulière du fond sur la circulation; pour cette raison, nous comparerons les résultats obtenus dans les cas suivants : profondeur variable (fig. 3) et profondeur constante (fig. 6). Lorsque la profondeur est constante, la force excitatrice $(\nabla h \wedge \tau_s^*)_z$ s'annule; la circulation dépend alors uniquement des flux aux frontières ouvertes.

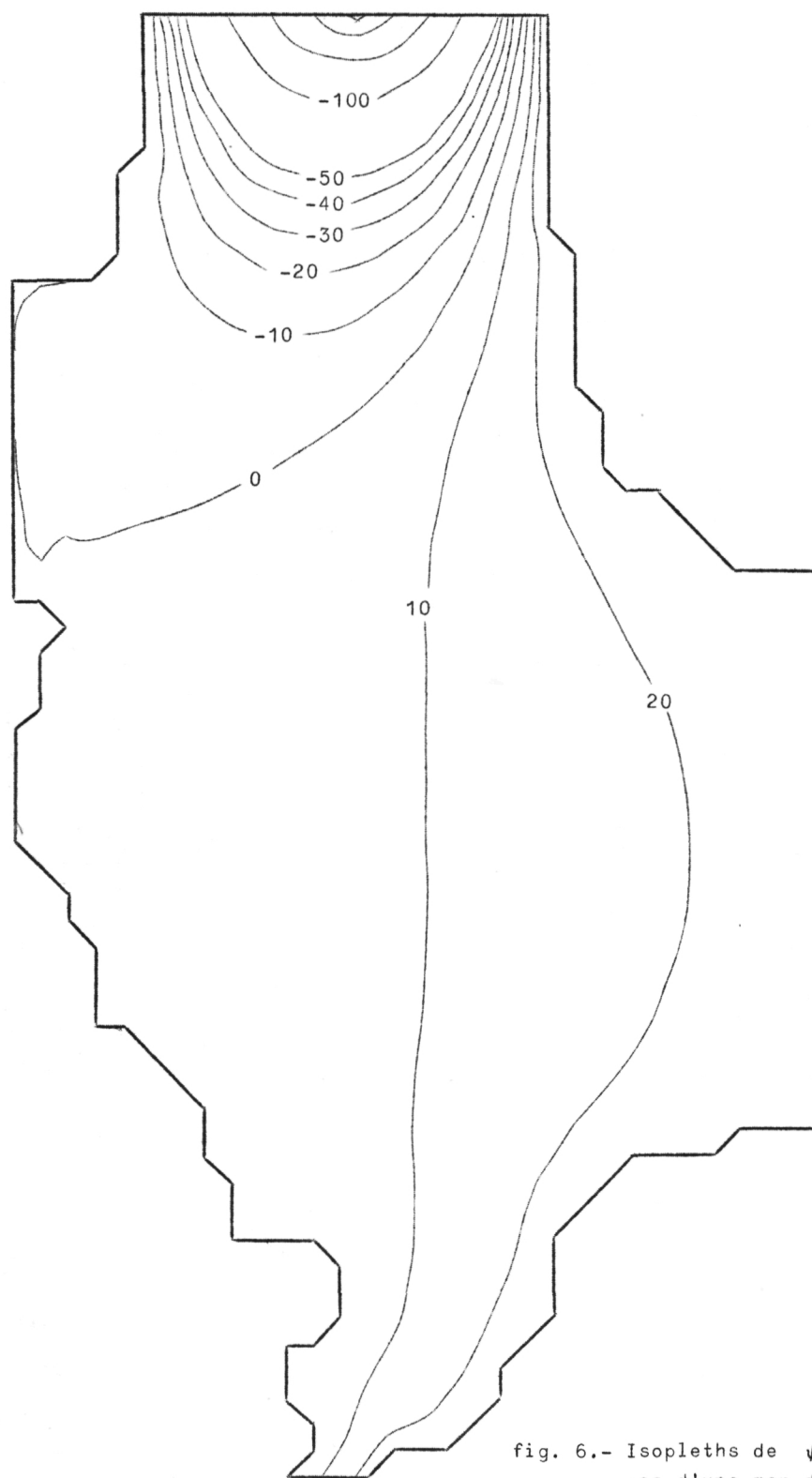


fig. 6.- Isopleths de $\psi \times 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ dans le cas d'une mer du Nord de profondeur constante 90,3 m ;
 $K = 0,00125 \text{ m/s}$;
 $\tau_{sx}^* = \tau_{sy}^* = 0,707 \times 10 \text{ m}^2/\text{s}^2$

La circulation avec une profondeur constante (fig. 6) est fortement différente de celle à profondeur variable. Les différences fondamentales sont les suivantes :

- i) pas de concentration de flux sortant le long de la côte norvégienne;
- ii) l'influence de l'Atlantique Nord se cantonne dans l'extrême nord de la mer du Nord;
- iii) pas de rebroussement des eaux atlantiques et pas de gyre anti-cyclonique au sud des côtes norvégiennes.

Les différences entre les circulations (fig. 3 et 6) prouvent de façon éclatante l'influence capitale de la topographie du fond dans la circulation résiduelle et montrent la nécessité impérieuse d'utiliser un modèle qui corresponde aussi bien que possible au bassin réel (faiblesse des modèles théoriques à solution analytique).

4.4.- Analyse quantitative des résultats obtenus par le modèle mathématique et les méthodes théorico-expérimentales (fig. 3 et 7)

Dans ce paragraphe les transports calculés à l'aide du modèle et des formules théoriques et empiriques seront comparés. Deux régions ont été choisies : l'une dans le sud de la mer du Nord, l'autre dans le Canal Norvégien.

i) Dans le Canal Norvégien

Nous avons choisi un point au milieu du Canal sur le 59^{ème} parallèle. En ce point, la vitesse intégrée du fond à la surface et la pente de la surface ont pu être estimées à l'aide des figures 3 et 7 respectivement à

$$|U| = 26,2 \text{ m}^2/\text{s} ,$$

$$\beta = 1,01 \cdot 10^{-6} .$$

Neumann (1966) donne un coefficient de viscosité turbulente $A = 33,2 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}$ pour un vent de 8 m/s . Nous considérerons une viscosité turbulente constante du fond sur toute la profondeur. Dans ces conditions, les profondeurs d'influence de friction sont égales et valent

$$D^* = D = \pi \sqrt{\frac{2A}{\rho f}} = 71,5 \text{ m} .$$

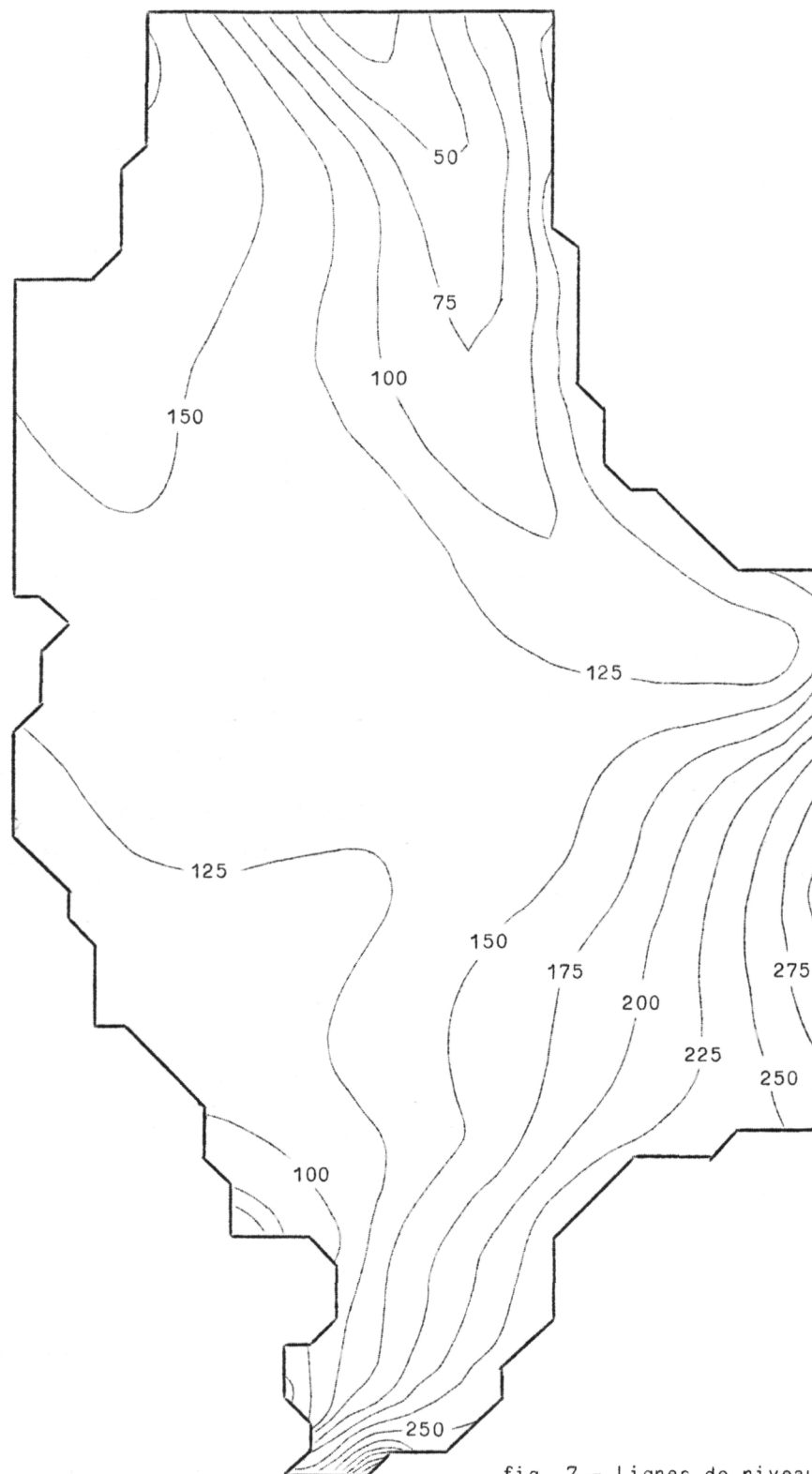


fig. 7.- Lignes de niveau en janvier (écart entre
deux lignes : 0,025 m);
 $K = 0,00125 \text{ m/s}$;
 $\tau_{sx}^* = \tau_{sy}^* = 0,707 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$

Le calcul de la vitesse intégrée due au vent donne

$$V_{(1)} = 0,396 \text{ m}^2/\text{s}$$

et celui dû à la pente de la surface (approximation géostrophique)

$$V_{(2)} \approx 19,6 \text{ m}^2/\text{s} .$$

La vitesse intégrée selon l'axe S-N vaut donc

$$V = V_{(1)} + V_{(2)} \approx 20 \text{ m}^2/\text{s}$$

valeur comparable à celle donnée par le modèle $26 \text{ m}^2/\text{s}$.

ii) Dans le sud de la mer du Nord

Dans cette région de nombreuses expériences ont eu pour but de relier vitesse du vent à celle du courant et rechercher le courant de base. Près du bateau phare Amrum Bank (côte danoise) Mandelbaum (1955) donne pour un vent de force 3-4 (de 4,5 à 8 m/s) la relation suivante :

$$\bar{V} = (4,38 - 0,14 \cos x + 7,3 \sin x) 10^{-2} \text{ m/s}$$

où x est l'angle entre la direction du vent et la direction N-E. Pour un vent du S-O nous obtenons en supposant la vitesse du courant uniforme sur la profondeur dans cette région où la profondeur moyenne est de 13 mètres :

$$V = 0,46 \text{ m}^2/\text{s} .$$

Nous pouvons estimer la composante V du transport dans cette région par la relation $V = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Appliquant cette formule, le modèle fournit :

$$V = 0,62 \text{ m}^2/\text{s}$$

valeur comparable à $V = 0,46 \text{ m}^2/\text{s}$ donnée par une autre méthode.

Donc quel que soit le lieu choisi pour tester le modèle, nous avons obtenu à l'aide du modèle mathématique des résultats comparables à ceux obtenus par d'autres méthodes. L'imprécision du modèle due à une profondeur lissée, à un maillage trop large et surtout aux erreurs d'estimation des flux aux limites est responsable en partie des écarts trouvés; mais les formules empiriques utilisées sont elles aussi affectées d'erreurs.

Pour ces raisons, nous pouvons conclure qu'il y a accord quantitatif satisfaisant entre la méthode du modèle mathématique et celle théorico-expérimentale.

5.- Conclusions

L'analyse qualitative et quantitative prouve qu'on peut étudier la circulation résiduelle à l'aide d'un modèle mathématique; mais pour que celui-ci puisse représenter la réalité, il est absolument indispensable de tenir compte de la géométrie la plus fidèle que possible du bassin.

Le principal avantage du modèle mathématique est de pouvoir étudier la circulation résiduelle en n'ayant besoin que d'un nombre restreint de mesures expérimentales : il suffit de connaître le champ de vent sur la région considérée et le flux d'eau aux diverses frontières ouvertes. La réduction du nombre de stations océanographiques permettra de raffiner les informations collectées et d'installer un réseau de bouées automatiques qui fourniront des mesures simultanées sans dépenses excessives.

6.- Remerciements

Ce travail a pu être réalisé grâce à l'aide financière du Conseil des Arts du Canada.

Je remercie tout spécialement Monsieur John D. Taylor qui mit au point les programmes de résolution des équations.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Dr. N.J. Campbell, océanographe en chef, qui m'a permis de venir étudier, à la Direction des Sciences de la Mer, les modèles mathématiques.

Que le Dr. T.S. Murty et le Dr. G. Godin ainsi que Messieurs K.B. Yuen et F. Barber soient remerciés pour leurs nombreux conseils.

Références

- BÖNNECKE (G.), (1922). Salzgehalt und Strömungen der Nordsee. Veröff. Inst. Meeres. Univ. Berl., N.F.A. A. *Geogr. Naturwiss. R.H.*, 10, 1-34.
- BOWDEN (K.F.), (1953). Note on wind drift in a channel in the presence of tidal currents, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 219, 426-446.
- BOWDEN (K.F.), (1956). The flow of water through the Straits of Dover, related to wind and difference in sea level, *Phil. Trans. of the Roy. Soc. Lond.*, A 248, 517-551.
- CARRUTHERS (J.N.), (1926). The water movements in the southern North Sea, Part 2, The bottom currents, *Fish. Invest.*, Lond. (ser. 2), 9 (3), 1-114.
- FISHER (G.), (1959). Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, *Tellus*, II, I, 611-646.
- GROEN (P.) and GROVES (G.W.), (1966). *Surges*, in *The Sea*, I, Edited by M.N. Hill, Interscience, New York, 611-646.
- HANSEN (W.), (1956). Theorie zur Errechnung des Wasserstandes der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen, *Tellus*, 8, 287-300.
- HANSEN (W.), (1966). The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical-numerical methods, *Tech. Report 25 of the Sub-Com. Ocean Res. Hamburg*.
- HEAPS (N.S.), (1969). A two dimensional numerical sea model, *Phil. Trans. of the Roy. Soc. Lond.*, A 265, 93-137.
- LAEVASTU (T.), (1963). *Serial Atlas of the Marine Environment*, Folio 4, 2 charts, published by Amer. Geogr. Soc.
- LUMB (F.E.), (1963). *Serial Atlas of the Marine Environment*, Folio 9, published by Amer. Geogr. Soc.
- MANDELBAUM (H.), (1955). Wind-generated ocean currents at Amrum Bank Light-ship, *Trans. Am. Geophys. Union*, 36, 72-86.
- MURTY (T.S.) and TAYLOR (J.D.), (1970). A numerical calculation of the wind-driven circulation in the Gulf of St Lawrence, *J. of the Ocean Soc. of Japan*, 26 (4), 15-26.

- NEUNANN (G.) and PIERSON (W.J.), (1966). *Principles of physical oceanography*, edited by Prentice-Hall Inc., New York.
- NIHOUL (J.C.J.), (1971). Shear effect and eddy diffusion in the Southern North Sea, *Proc. North Sea Conference*, Aviemore, Nov. 14-20.
- NIHOUL (J.C.J.), (1972). *Hydrodynamical and biochemical state variables and evolution equations for the mathematical modelling of sea pollution* in *Proc. Liège Third Coll. on Ocean Hydrodynamics*, Liège, May 3-8, 1971.
- OTTO (L.), (1970). The mean residual transport pattern in the Southern North Sea, *I.C.E.S., CM 1970, C 21*.
- RAMSTER (J.W.), (1965). Studies with the woodhead sea bed drifters in the Southern North Sea, *Lab. Leaflet. Fish. Lowestoft (N-S)*, 6, 1-4.
- RONDAY (F.C.), (1971). La dispersion d'un polluant en mer du Nord, *Programme national belge sur l'environnement physique et biologique*, Report N 4.
- RONDAY (F.C.), (1972). Modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord, *Marine Science Branch., Manuscript Report Series*, N° 27.
- VELEY (V.F.C.), (1960). The relationship between local wind and water movements in coastal waters of the British Isles, *Proc. I, Int. Conf. on Waste disposal in the marine environment*, edited by E.A. Pearson, Pergamon Press, Oxford.
- WEENINK (M.P.H.), (1958). A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly-enclosed sea, *Med. en Verhand. K. ned. Meteor. Inst.*, N 73, III p.
- WILSON (B.W.), (1960). Note on surface wind stress over water at low and high speeds, *J. of Geophys. Res.*, 65, 3377-3382.
- WYRTKI (K.), (1952). Der Einfluss des Windes auf die Wasserbewegungen durch der Strasse von Dover, *Dt. Hydro. Zeit.*, 5, 21-27.

C.- RESIDUAL AND WIND-DRIVEN CIRCULATION IN THE SOUTHERN BIGHT

1.- Introduction

One of the most recent attempts to study the residual currents in the Southern part of the North Sea was made by Otto (1970). In this experimental study, a great number of measurements were made by light vessels during a long time period (Summer) to deduce the general flow pattern by integration over a tidal period.

In this paper, starting from the vertically integrated governing equations, established by Nihoul (1972), stationary equations are written and solved by a numerical iterative process, requiring only boundary values as experimental data.

2.- Governing equations

The vertically integrated momentum and continuity equations of the mathematical model [Nihoul (1972)] are :

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} - f V = - H \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\overline{v_1 v_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\overline{v_2 v_1}} \\ - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\hat{v}_1 \hat{v}_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\hat{v}_2 \hat{v}_1} - [\overline{\hat{v}_3 \hat{v}_1}]_{x_3=-h}^{x_3=h}$$

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + f U = - H \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\overline{v_1 v_2}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\overline{v_2 v_2}} \\ - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\hat{v}_1 \hat{v}_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\hat{v}_2 \hat{v}_2} - [\overline{\hat{v}_3 \hat{v}_2}]_{x_3=-h}^{x_3=h}$$

$$(3) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

where h is the mean depth, ζ is the deviation from the mean depth, $H = h + \zeta$ is the real depth, \sim indicates integration on real depth, g is the acceleration due to gravity, f is Coriolis parameter, $v_i = \overline{v_i} + \hat{v}_i$ are the velocity vector components, T is the characteristic time scale, U and V are vertically integrated velocity components

$$U = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v_1} dx_3$$

$$V = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v_2} dx_3$$

3.- Residual currents

The test region is sufficiently large for the effects of the Coriolis forces to influence its dynamical behaviour. However, it is not large enough to be influenced either by the curvature of the earth's surface or by the variations of the Coriolis parameter.

Therefore, we assume $f = C^{te}$ over the whole region.

Another source for the generation of water currents are density gradients. In the present study, density effects are ignored by assuming the body of water to be homogeneous. This corresponds indeed to the situation of the Southern Bight even during the summer.

In equations (1) and (2), the advection terms and horizontal mixing are ignored. In addition, the term $g\zeta \nabla \zeta$ is omitted by assuming $\zeta \ll H$.

The boundary interaction terms are approximated by introducing the concepts of surface stresses τ_s and bottom stresses τ_b .

$$[\overline{\hat{v}_3 \hat{v}_1}]_{-h}^{\zeta} = \tau_{s1} - \tau_{b1}$$

$$[\overline{\hat{v}_3 \hat{v}_2}]_{-h}^{\zeta} = \tau_{s2} - \tau_{b2}$$

The quadratic stress law $\rho^{-1} \tau_b = k |v| v$ is generally used to approximate the bottom stress phenomenon. In the K.B.M. form we write here :

$$\tau_{b1} = k \frac{U}{h}$$

where k denotes the bottom stress coefficient with the dimension of a velocity. The most plausible value in the North Sea is $k = 1.25 \times 10^{-3}$. In the Southern Bight, one generally takes a larger value because, in shallow water, bottom interactions are stronger. The model was tested with

$$k = 10^{-2}.$$

The wind interaction term may be approximated by the law

$$\tau_s = \rho_a c_d |W| W$$

where ρ_a is the density of air.

According to Wilson's statistical study (1960) $c_d = 1.49 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg}$. As we consider the mean stationary flow $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial t}$ and $\frac{\partial V}{\partial t}$ vanish.

The time scale T is supposed to be greater than all significant tidal periods.

The above mentioned assumptions specify the meaning of *residual currents*. We consider the currents generated by Coriolis forces and submitted to surface interaction (wind) and bottom stress.

4.- Stream function

From equations (1) and (2), we get the linearized form of governing steady, vertically integrated equation :

$$(4) \quad -fV = -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \tau_{s1} - \frac{k}{h} U$$

$$(5) \quad fU = -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \tau_{s2} + \frac{k}{h} V$$

Introducing stream function ψ such that

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

and eliminating ζ from (4) and (5) we get the boundary value problem :

$$(6) \quad \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \left(-\frac{f}{k} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \left(\frac{f}{k} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \\ = \frac{h}{\rho k} \left(\frac{\partial \tau_{s2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{s1}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{\rho k} \left(\tau_{s1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \tau_{s2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)$$

5.- Integration

5.1.- Domain

The Southern Bight is characterized by the relative proximity of the Western and Eastern Coasts and also by open boundaries in the South and

the North. In order to respect the coastal shape we choose a thin rectangular net grid with step size $D_{x_1} = 7.6 \times 10^3$ m and $D_{x_2} = 7.9 \times 10^3$ m and 34×31 points.

5.2.- Finite difference approximation

We use a central difference approximation for all derivatives in equation (6), we get for all interior points :

$$(7) \quad \psi_{i+1,j} \left\{ \frac{1}{(D_{x_1})^2} + \frac{A_{i,j}}{2 D_{x_1}} \right\} + \psi_{i-1,j} \left\{ \frac{1}{(D_{x_1})^2} - \frac{A_{i,j}}{2 D_{x_1}} \right\} + \psi_{i,j+1} \left\{ \frac{1}{(D_{x_2})^2} - \frac{B_{i,j}}{2 D_{x_2}} \right\} \\ + \psi_{i,j-1} \left\{ \frac{1}{(D_{x_2})^2} + \frac{B_{i,j}}{2 D_{x_2}} \right\} - 2 \psi_{i,j} \left\{ \frac{1}{(D_{x_1})^2} + \frac{1}{(D_{x_2})^2} \right\} = F_{i,j}$$

with

$$A_{i,j} = \left\{ -\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{f}{k} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right\}_{i,j}$$

$$B_{i,j} = \left\{ \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{f}{k} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right\}_{i,j}$$

$$F_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{k} \left\{ \frac{\partial \tau_{s2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{s1}}{\partial x_2} + \frac{1}{h} (\tau_{s1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \tau_{s2} \frac{\partial h}{\partial x_1}) \right\}_{i,j}$$

Liebman accelerated point over relaxation is a suitable method for solving equation (7) on the form :

$$(8) \quad C_{i,j} \psi_{i-1,j} + E_{i,j} \psi_{i+1,j} + G_{i,j} \psi_{i,j-1} + L_{i,j} \psi_{i,j+1} - 2 D \psi_{i,j} = F_{i,j}$$

the $(\ell + 1)^{th}$ iteration is calculated using :

$$(9) \quad \psi_{i,j}^{\ell+1} = \psi_{i,j}^{\ell} + \frac{1+c}{2D} \{ E_{i,j} \psi_{i+1,j}^{k_1} + C_{i,j} \psi_{i-1,j}^{k_2} + L_{i,j} \psi_{i,j+1}^{k_3} + G_{i,j} \psi_{i,j-1}^{k_4} \\ - 2 D \psi_{i,j}^{\ell} - F_{i,j} \}$$

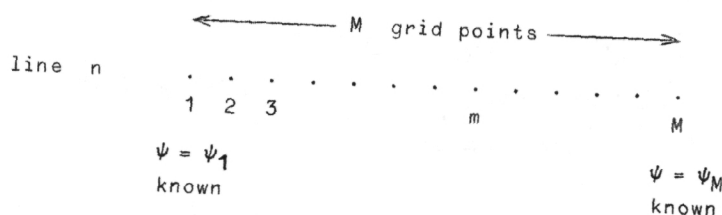
where c is the relaxation coefficient.

The use of superscripts k on the right hand side here, corresponds to an ordering of the computation points $k = \ell + 1$ when the point is soon calculated in the $(\ell + 1)^{th}$ iteration and $k = \ell$ when the point is not yet calculated in the $(\ell + 1)^{th}$ iteration.

6.- Computation

To start the iterative process for all the interior points, we need boundary values. We use the values of ψ calculated by Otto (1970) in summer including Schelde inflow. West boundary is set to zero.

As equation (9) is a diagonally dominant matricial equation the convergence is guaranteed and we may choose any values inside the domain. We speed convergence if the initial values are realistic; therefore, we interpolate ψ between coastal boundaries as follows :

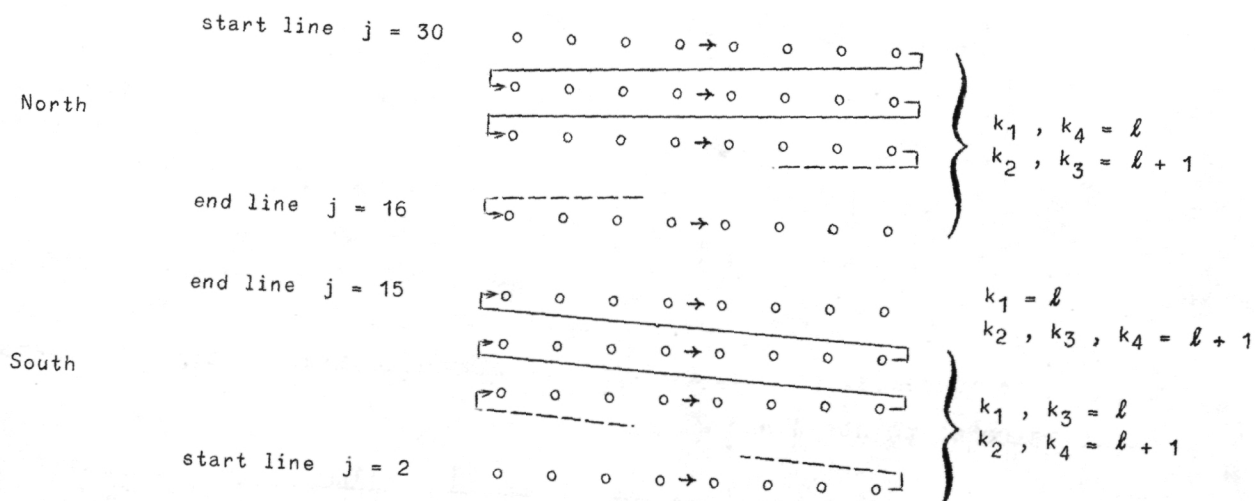


Initial value :

$$\psi_{m,n} = \psi_{1,n} + \left(\frac{m-1}{M-1}\right)(\psi_M - \psi_1)$$

As $\psi_{i,j}^{\ell+1}$ is a better approximation of ψ than $\psi_{i,j}^{\ell}$ we may speed convergence by choosing a computation order such that $k_i = \ell + 1$ for a maximum number of subscripts i .

In order to obtain such a process, the grid net is divided in two parts (North and South), computation is performed alternatively in these parts :



At first step this process improves the calculation of points on line 15, then step by step the calculation of all points.

We monitor convergence by checking

$$|\psi_{i,j}^{l+1} - \psi_{i,j}^l| < \delta$$

at ten points throughout the grid. When $\delta = 10^{-2}$, a hundred iterations are necessary.

7.- Elevation

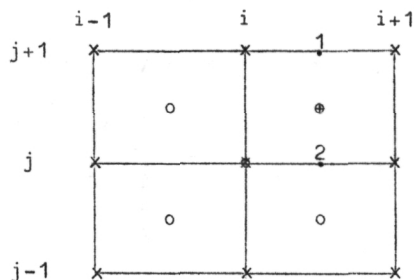
To find the deviation $\zeta(x_1, x_2)$, from mean water height $h(x_1, x_2)$ equations (4) and (5) are written in the following form :

$$(10) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{1}{gh} \left\{ f \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \tau_{s1} + \frac{k}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\}$$

$$(11) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \frac{1}{gh} \left\{ f \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \tau_{s2} - \frac{k}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\}$$

As stream functions and depths are known at all points of the net grid, the right hand side of equations (10) and (11) can be approximated by finite differences.

In order to improve this approximation we compute the elevations in the central points of the squares defined by the stream functions net grid.



x stream point

o elevation point

Stream point x and elevation point o are denoted by the same subscript (i,j)

For instance, to compute $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ at elevation point (i,j) we average that value at points 1 and 2 :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)_{i,j} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j+1}}{D_{x_1}} + \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{D_{x_1}} \right\} + O(D_{x_1}^2) .$$

So equations (10) and (11) reduce to an initial value problem.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = f_1 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = f_2$$

where f_1 and f_2 are known.

8.- Numerical method

Following Rao and Murty (1970), we use a least square approximation of Taylor expansion.

Starting from an arbitrary point $\zeta_{i_0, j_0} = 0$, we approximate the neighbouring point by :

$$(12) \quad \begin{aligned} \zeta_{i,j} &= \zeta_{i+1,j} \pm D_{x_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \\ \zeta_{i,j} &= \zeta_{i,j+1} \pm D_{x_2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Such a process gives four values at each interior point.

The best approximation in the least square sense minimizes the error E :

$$(13) \quad E = [\zeta_{i,j} - \zeta_{i+1,j} + D_{x_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j}]^2 + [\zeta_{i,j} - \zeta_{i-1,j} - D_{x_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right)_{i-\frac{1}{2},j}]^2 \\ + [\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1} + D_{x_2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}]^2 + [\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j+1} - D_{x_2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}]^2$$

E reaches the minimum when $\frac{\partial E}{\partial \zeta_{i,j}} = 0$. In this case, the best approximation reduces to the average of the four values. Hence, the equation left is

$$(14) \quad 4 \zeta_{i,j} - \zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j} - \zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1} = D_{x_1} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\ + D_{x_2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right]$$

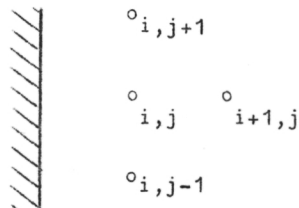
for the interior point.

Remark

Equation (14) is the discrete approximation of Poisson equation $\nabla^2 \zeta = g$. Thus to solve the first order problem (10), (11), the numerical method changes it into a second order problem. Therefore, boundary conditions must be chosen to respect the first order problem.

Boundary conditions

Rao and Murty (1970) use the best approximation of Taylor expansion in the least square sense even to compute boundary points of iterative process. For an example, to compute $\zeta_{i,j}$ they average the Taylor expansion



of $\zeta_{i+1,j}$, $\zeta_{i,j-1}$, $\zeta_{i,j+1}$. This non symmetric process is of second order in j direction and first order in i direction. Therefore, it is better to use only two values to respect the order of the problem. This modification improves the results in case of strong wind when τ_s is greater than $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

9.- Results

Figures 1 to 6, drawn by our isoline Benson program, show the pattern of stream functions and water elevations in the test region for different values of wind and depth.

9.1.- Stream functions

The lines drawn in Figures 1 to 3 join the point where $\psi = C^{te}$. Line 9 for instance is the line $\psi = 225 \times 10^3 \text{ m}^3/\text{sec}$. To show the influence of the depth on the stream pattern, the depth is first supposed constant (20 m).

In this non realistic case (Fig. 1), the general flow is uniformly distributed in North East parallel lines with local deviation in South West and North West part, due to boundary inflow and coastal shape.

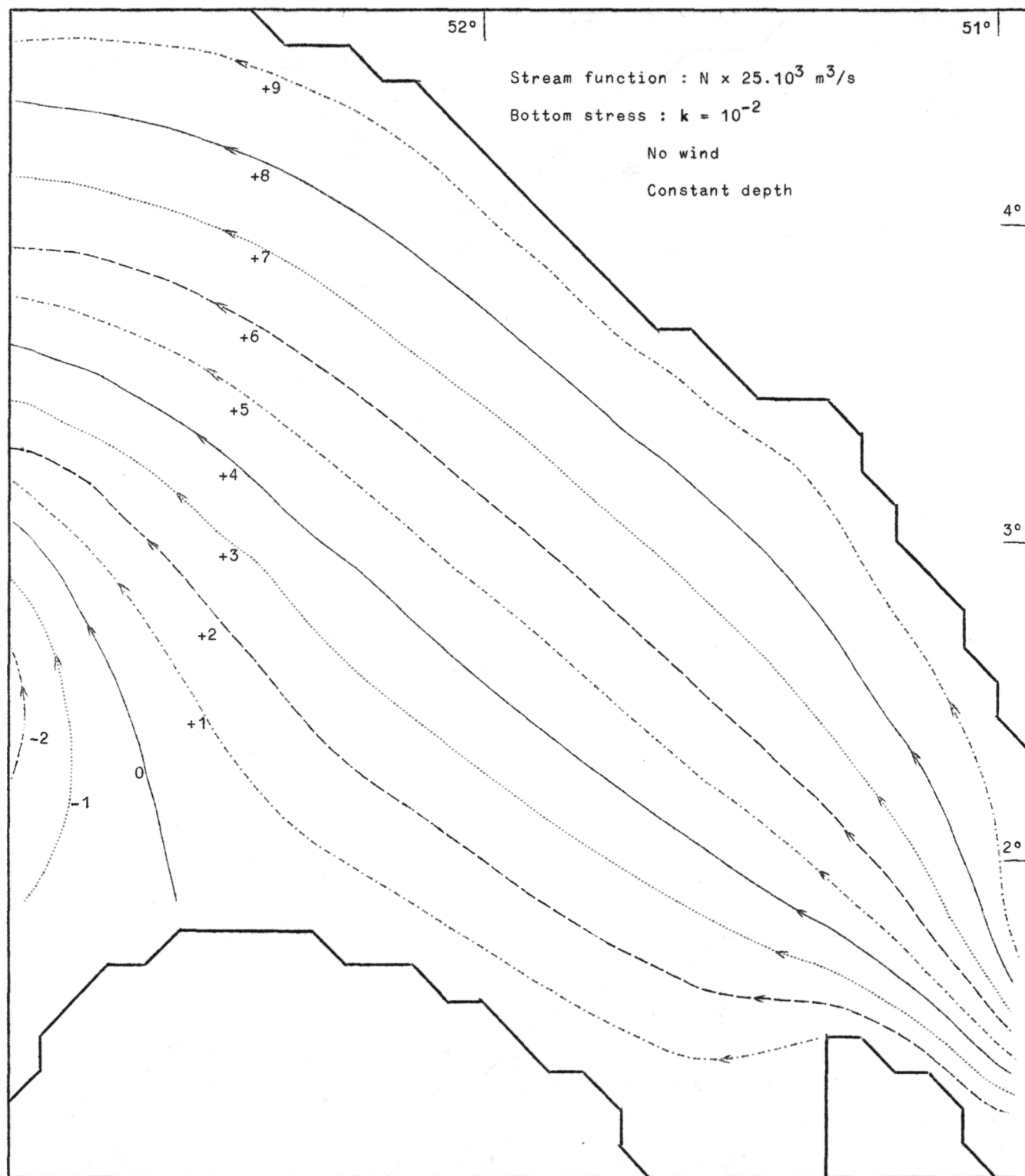


fig. 1.

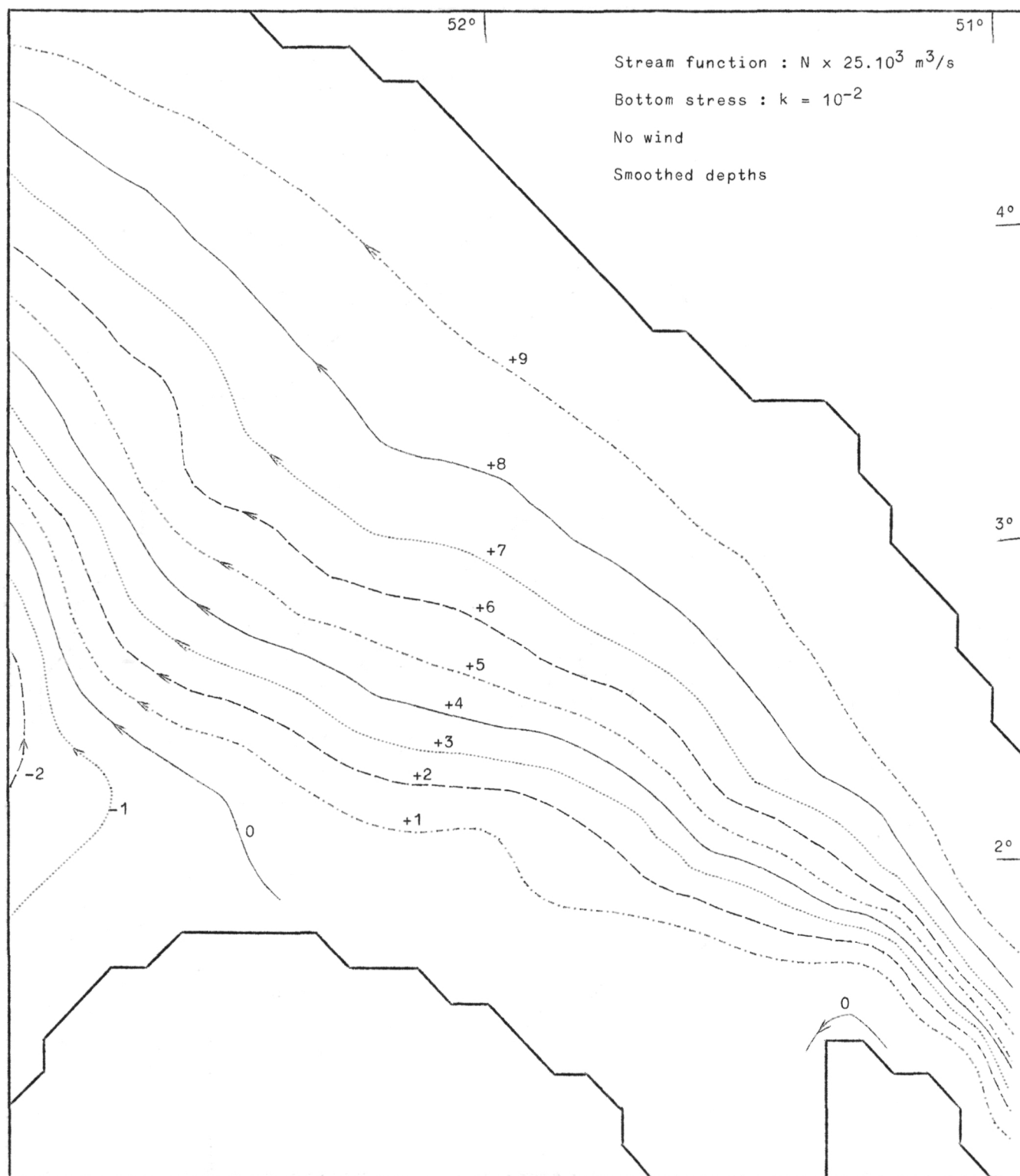


fig. 2.

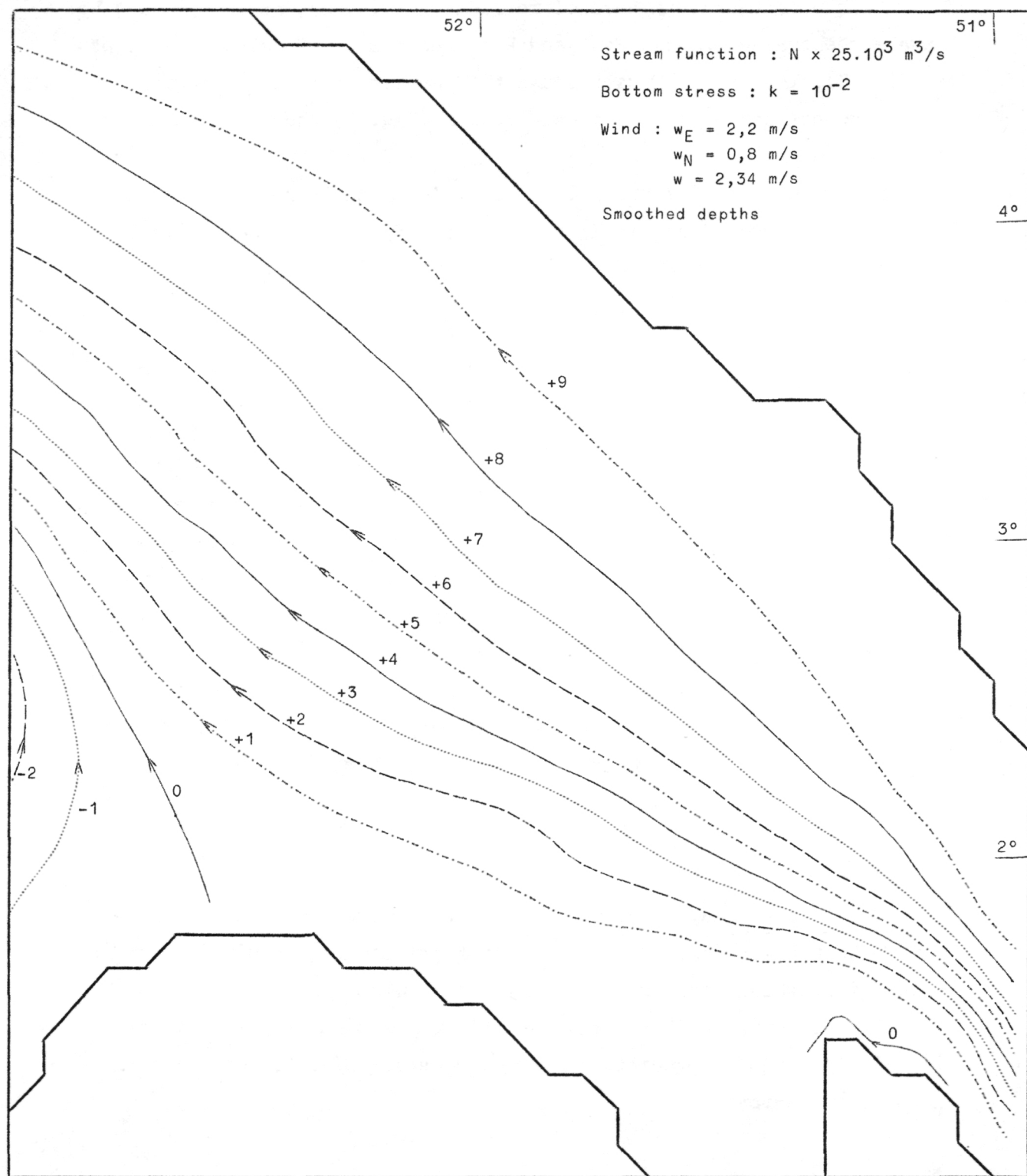


fig. 3.

On the contrary, in case of real depth (Fig. 2), stream lines 1 to 9 are concentrated between East and West depth line 25 metres (see depth map Fig. 7). The water flows through the deepest part of the region.

A comparison with Otto's calculation (Fig. 8) shows a good agreement of the results.

The wind effect is shown in Fig. 3. The wind introduced here is rather weak (summer mean) in East-North East direction. The stream lines are smoother than in the absence of wind (Fig. 2) but the general flow pattern is the same.

9.2.- Water elevation

Fig. 4 shows the deviation ζ from the mean sea level in case of constant depth (20 m). The elevation is referred to initial point (middle of line 0) and its value grows from West to the East and from North to the South. The absolute difference from the minimum (- 30 cm) and maximum (+ 40 cm) is rather important but it represents only 3 % of the depth.

In case of real depth (Fig. 5) the same pattern occurs but the gradients are weaker and the absolute difference is of order 50 cm. This difference is important at a few points where it represents 10 % of the real depth but only 2 % of the mean depth. The wind effect is not significant (Fig. 6) and general pattern of elevation is the same.

10.- Conclusion

This first study of Southern bight dynamic gives interesting results with the important effects of depth pattern and no wind effect in summer time. These results agree with experiments.

Further study will use the present computation program with the diffusion program to predict the long time scale diffusion phenomenon in the test region.

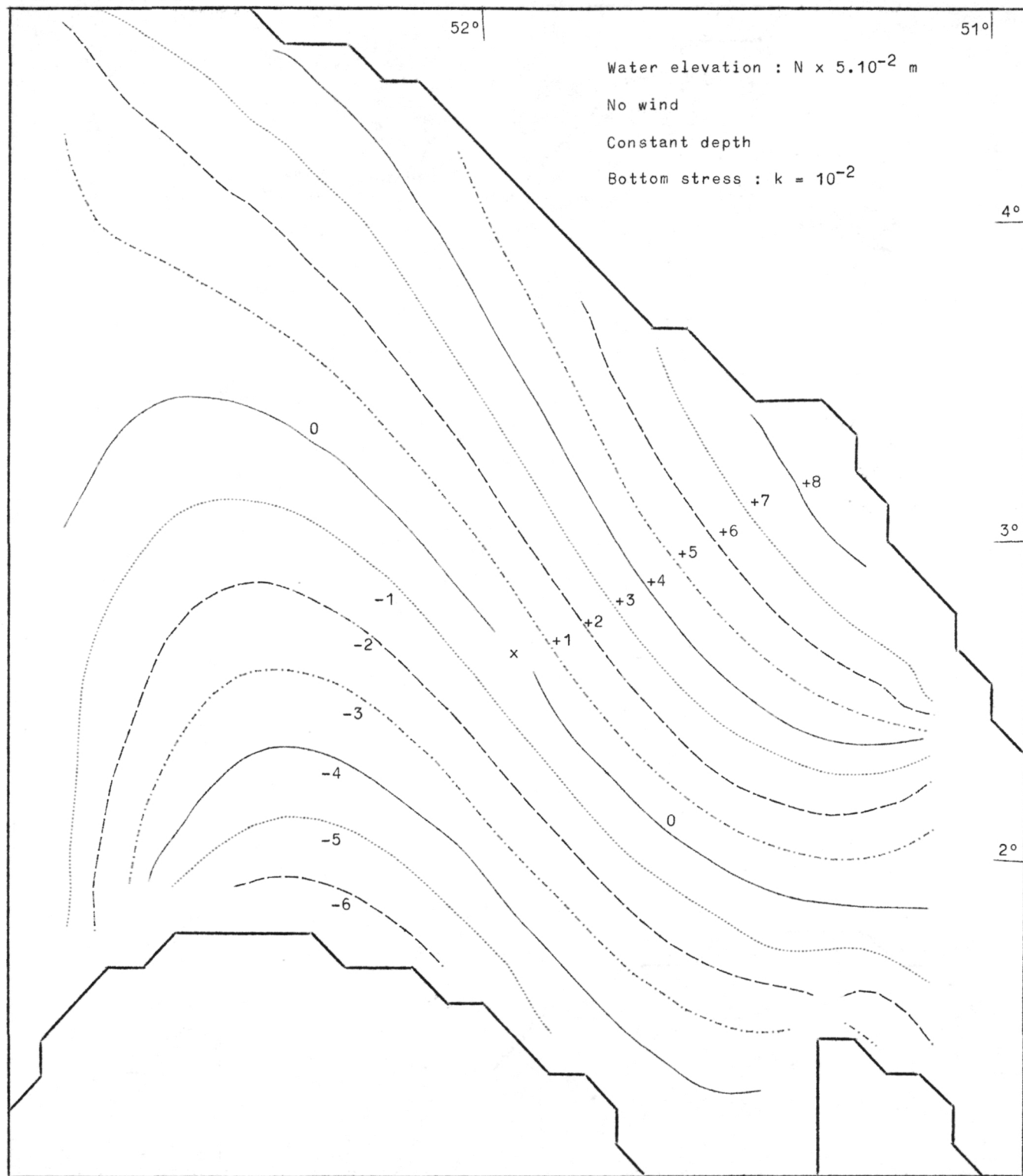


fig. 4.

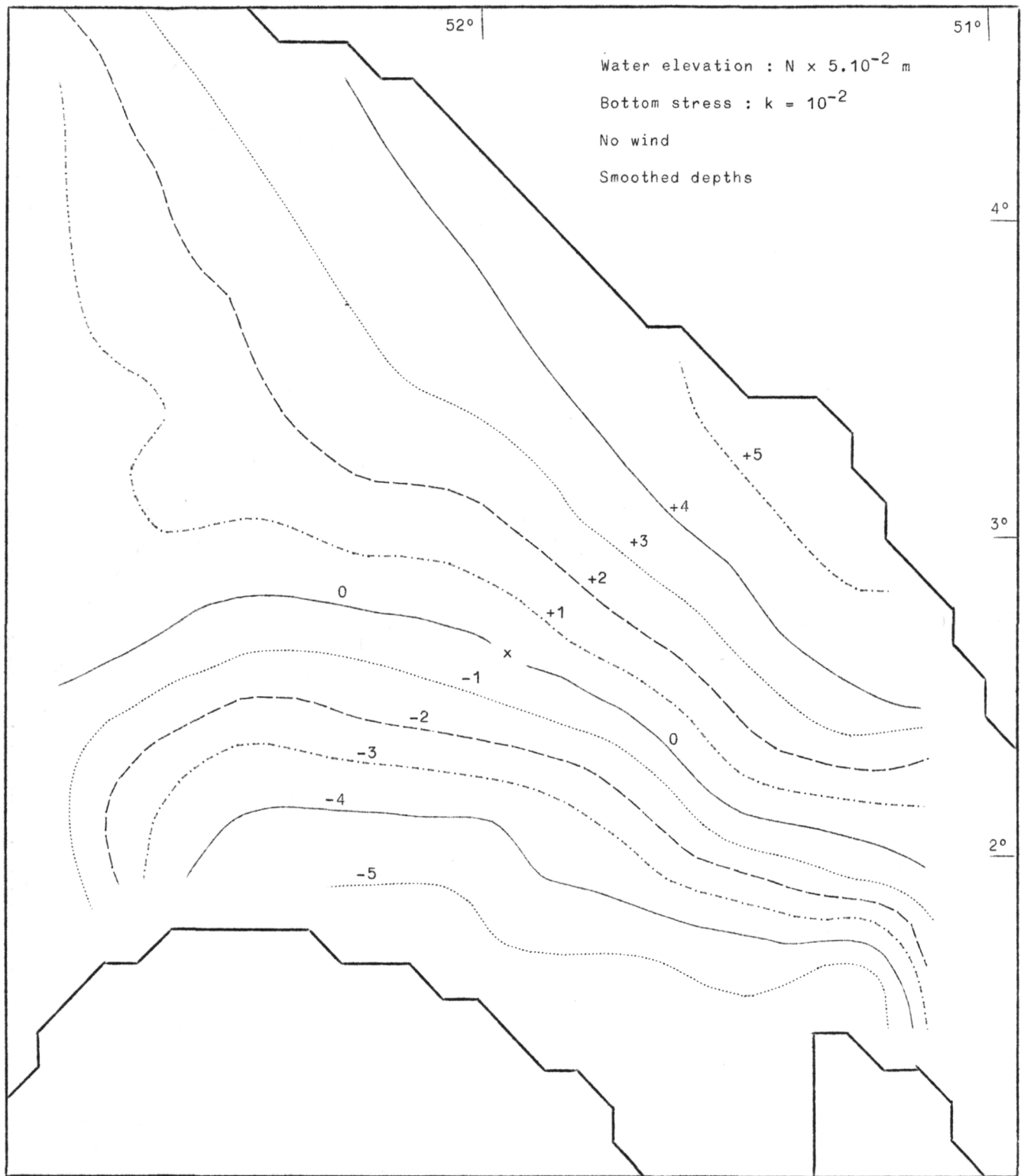


fig. 5.

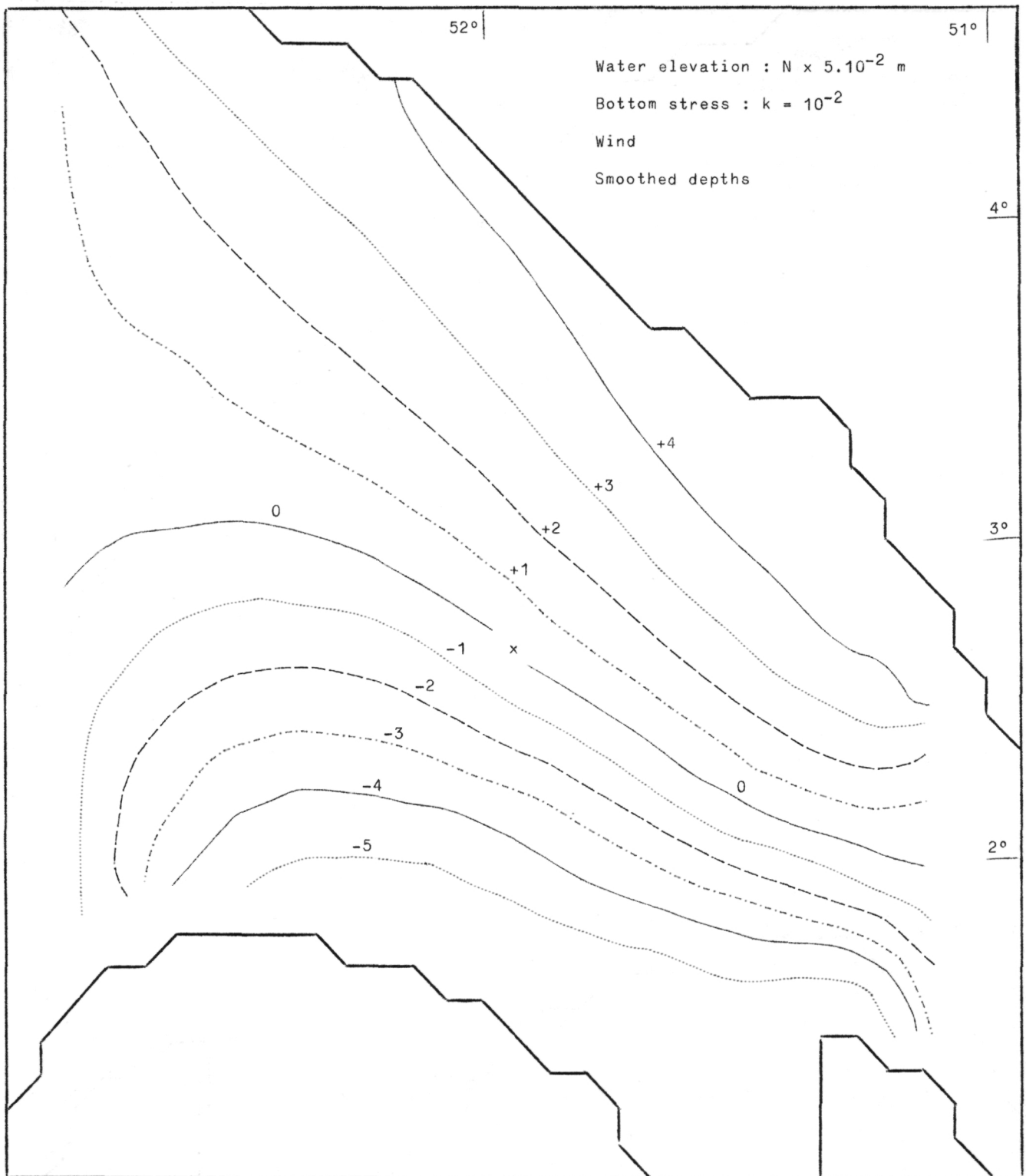


fig. 6.

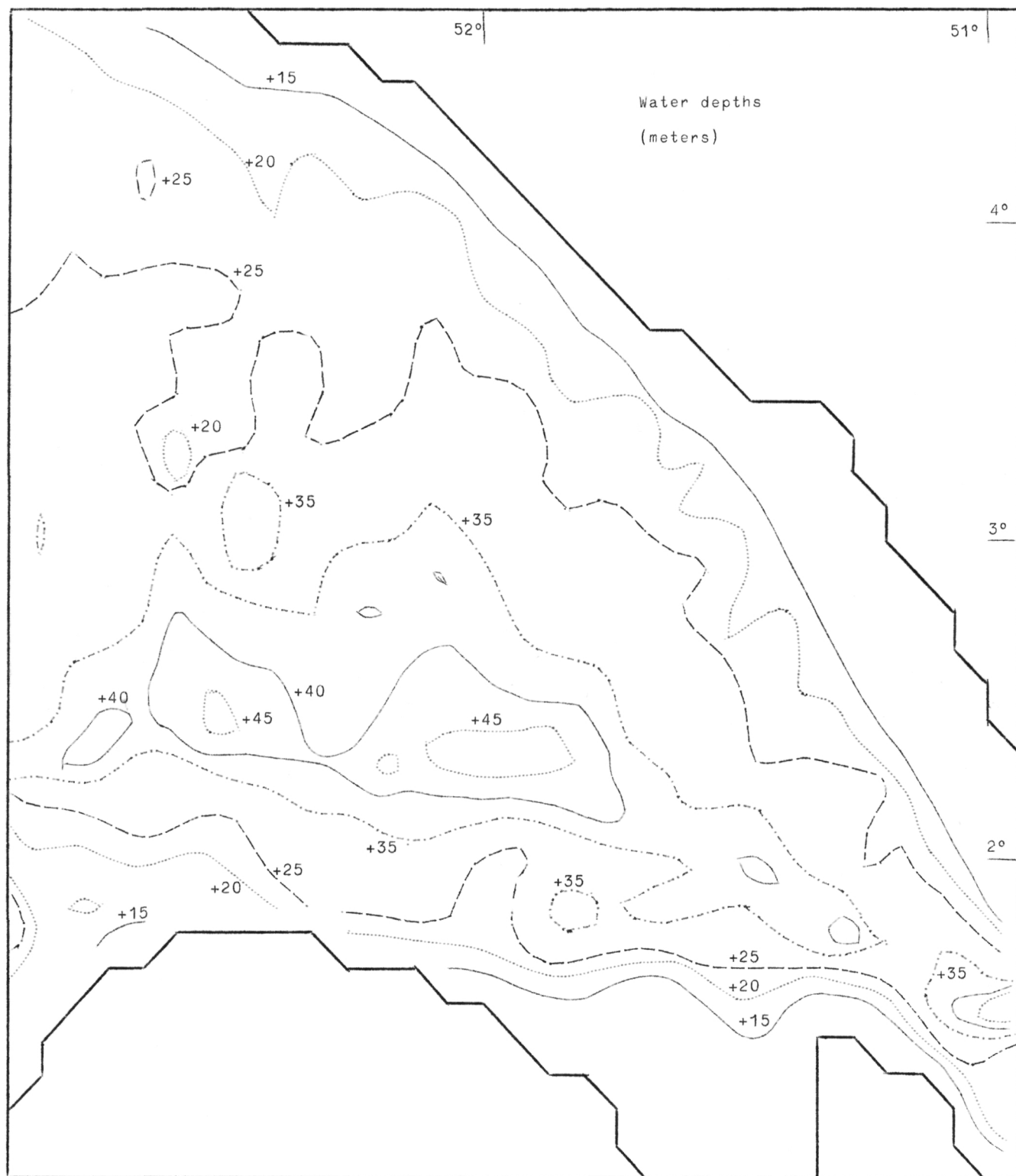


fig. 7.

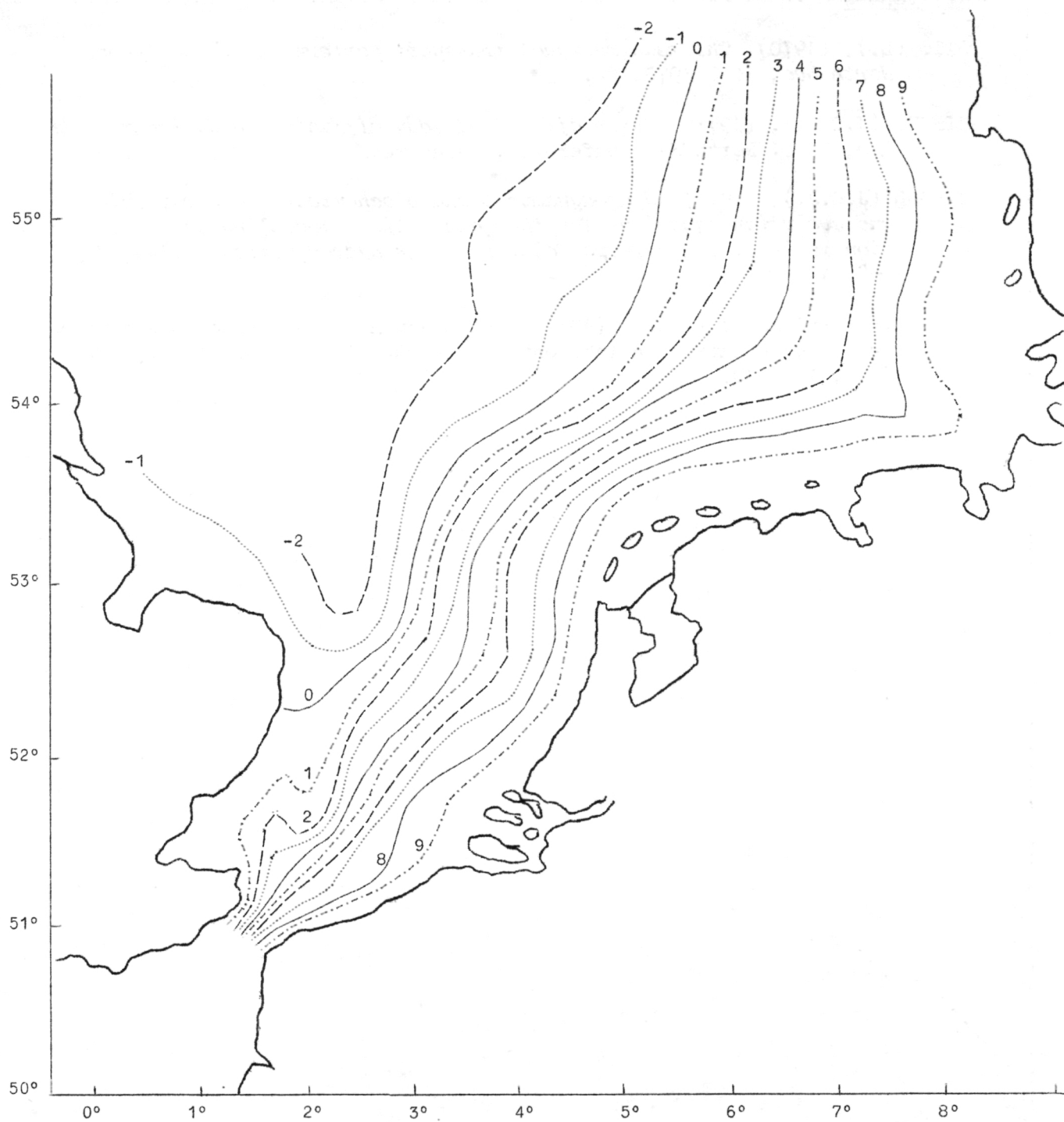


fig. 8.- Stream function (Otto's calculation) - $N \times 25.10^3 \text{ m}^3/\text{s}$.

References

- OTTO (L.), (1970). *The mean residual transport pattern in the Southern North Sea*, ICES 1970, C2.
- NIHOUL (J.C.J.), (1971). *Shear effect and eddy diffusion in Southern North Sea*, Proc. North Sea Conference, Aviemore.
- NIHOUL (J.C.J.), (1972). *Hydrodynamical and biochemical state variables and evolution equations for the mathematical modelling of sea pollution* in Proc. Liège Third Coll. on Ocean Hydrodynamics, Liège, May 3-8, 1971.
- RAO (D.B.) and MURTY (T.S.), (1970). Calculation on the steady state wind-driven circulation in lake Ontario, *Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A* 19, 195-210.

D.- NUMERICAL METHODS FOR THE COMPUTATION OF SHEAR EFFECT DIFFUSION

1.- Diffusion equation

1.1.- General form

Our present aim is to solve numerically the shear-diffusion equation [Nihoul (1971)]

$$(1) \quad \frac{\partial r}{\partial t} + u \cdot \nabla r = \frac{\alpha}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1^2 H^2}{U} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1 u_2}{U} H^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1 u_2}{U} H^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_2^2 H^2}{U} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) \right\} + \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_1 \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) \right]$$

Our assumptions are : [for detailed explanation see Adam and Runfola (1971)]

$$H = C^{te}$$

$$u_1 = u_1(t)$$

$$u_2 = u_2(t)$$

$$\mu_i = \mu(\alpha, H, U) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

We may write equation (1) :

$$(2) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = Ar + Sr + Tr$$

$$(3) \quad A \equiv - \left[u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \quad (\text{advection operator})$$

$$(4) \quad S \equiv \frac{\alpha H}{U} \left(u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{shear-effect operator})$$

$$(5) \quad T \equiv \frac{\mu}{H} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{turbulence operator})$$

All these denominations are used in this report for the sake of simplicity.

In the North Sea, the μ -parameter can be written

$$\mu_2 = \mu_1 = \mu_0 \alpha H^2 U.$$

As $\mu_0 \ll 1$ (μ_0 dimensionless), this approximation has actually very little effect on the computations.

1.2.- Dimensionless form

In our present computations we use a square grid of points to simulate the dispersion of a pollutant. It is easier to discuss the numerical approximations on a non-dimensional equation.

Let L be the half length of the grid, U^+ the minimum value of U ($U^{(t)} \neq 0$ at each t) and

$$(6) \quad \xi_i = \frac{x_i + L}{2L} \quad (\text{dimensionless space variables})$$

$$(7) \quad \tau = t \frac{U^+ H}{2L^2} \quad (\text{dimensionless time variable})$$

This transformation is chosen so that the coefficients of second derivatives are approximately equal to 1.

$$(8) \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = -\frac{L}{H} \left(\frac{u_1}{U^+} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{U^+} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{u_1^2}{U^+ U} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{u_1 u_2}{U^+ U} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{u_2^2}{U^+ U} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{\mu_0 \alpha}{2} \frac{U}{U^+} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2^2} \right)$$

or

$$(9) \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = Ar + Sr + Tr$$

if we recall $\tau : t$, $\xi_i : x_i$ and give to A, S, T the proper definitions, i.e.

$$(10) \quad A = -\frac{L}{H} \left(\frac{u_1}{U^+} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{u_2}{U^+} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right).$$

For numerical approximation, it is easier to write (8) :

$$(11) \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = \alpha_1 \frac{\partial r}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial r}{\partial x_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} + 2 \beta_3 \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2}$$

with

$$(12) \quad \alpha_i = -\frac{L}{H} \frac{u_i}{U^+} \quad i = 1, 2$$

$$(13) \quad \beta_i = \frac{\alpha}{2U^+} \left(\frac{u_i^2}{U} + \mu_0 U \right) \quad i = 1, 2$$

$$(14) \quad \beta_3 = \frac{\alpha}{2U^+} \frac{u_1 u_2}{U}$$

1.3.- Analysis of the equation

It is easy to see by a classical formula that

S is a parabolic operator

T is an elliptic operator

$S + T$ is an elliptic operator too.

In the North Sea $\|Sr\| \gg \|Tr\|$ usually, r being a solution of (11) with

$$\|Tr\| = \int_0 r(Tr) dx_1 dx_2$$

because $\frac{u_1^2}{U} \gg \mu_0 U$

$[\mu_0 \text{ is } O(10^{-2}) \text{ and } u_1 u_2 = O(U) = O(1)].$

We do not neglect the *turbulence* operator T anymore, although its influence on the diffusion process is negligible with regard to the accuracy we may expect from our numerical schemes, but the presence of this operator is important with regard to the type of equation (11). As all numerical schemes to solve diffusion equations assume the spatial operator to be elliptic [S. McKee and A. R. Mitchell (1970)], we take T -operator into account for a theoretical-numerical reason.

1.4.- Further applications of the K.B.M. technique

Equation (11) may be treated in its present form which is actually derived from a succession of approximations and integrations (over time and depth) of the original evolution equations.

It may be once again integrated over time if we suppose that :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \gg \frac{\partial r}{\partial t} \quad i = 1, 2$$

$$(15) \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial r}{\partial t} dt \approx \frac{r(t+T) - r(t)}{T} \approx \frac{\partial r}{\partial T} \approx \langle \alpha_1 \rangle \frac{\partial r}{\partial x_1} + \dots$$

where $\langle \alpha_1 \rangle$, $\langle \alpha_2 \rangle$, $\langle \beta_1 \rangle$, ... vary slowly with T .

Let us immediately explain the physical background of this integration. It is first assumed that the concentration varies much more slowly than the currents (before integration). On the contrary, the *averaged* currents vary slowly (with the dial variation of tide or wind, for example).

This K.B.M. method may be applied to the A-operator only. This operation has very little mathematical background, but its physical meaning is clear : the diffusion and mixing are performed by periodic tidal currents and wind driven currents with strong time variations while the mean advection is made by a *residual* current which is very slowly varying.

We thus define three sets of approximations :

- Approximation 1 : no further averaging is performed upon equation (11)
- Approximation 2 : only the A-operator is averaged
- Approximation 3 : integration is performed upon all operators.

N.B. Let us notice that the K.B.M. integration makes the S-operator elliptic. The discriminant of the S-operator was before integration

$$\left(\frac{\alpha H}{U}\right)^2 [(u_1 u_2)^2 - u_1^2 u_2^2] = 0$$

After integration :

$$\left(\frac{\alpha H}{U}\right)^2 \left[\left(\int_t^{t+T} \frac{u_1 u_2}{U} d\tau \right)^2 - \left(\int_t^{t+T} \frac{u_1^2}{U} d\tau \right) \left(\int_t^{t+T} \frac{u_2^2}{U} d\tau \right) \right] \leq 0$$

which is the ellipticity condition. This inequality is in fact Schwartz's inequality

$$\|f_1\| \|f_2\| \geq |(f_1, f_2)|$$

with $f_i = \frac{u_i}{U^{\frac{1}{2}}}$ $i = 1, 2$

$$(f_1, f_2) = \int_t^{t+T} f_1 f_2 d\tau$$

$$\|f_i\| = |(f_i, f_i)|^{\frac{1}{2}}$$

1.5.- Boundary conditions

For a diffusion (parabolic) equation, on a finite domain, there may be three kinds of boundary conditions :

- | | |
|------------------------|--|
| 1) Dirichlet condition | $r _r = r(s)$ |
| 2) Neumann condition | $\frac{\partial r}{\partial n} _r = p(s)$ |
| 3) Fourier condition | $(\alpha \frac{\partial r}{\partial n} + \beta r) _r = q(s)$ |

where s is the curvilinear variable on Γ .

Our domain is in fact infinite (for the present simple study) and our numerical solution cannot be computed except on a finite domain. Thus the only realistic condition $r|_\infty = 0$ cannot be used without care. The only way to treat such a problem is to use conformal mapping to transform an infinite domain into a bounded one. But this is unrealistic and incompatible with our final aim [generalize the solution of (11) to the case where u_1, u_2, H are not homogeneous and the boundary is not infinite].

Thus we have preferred to use the following method :

- choose one of the three possible *homogeneous* boundary conditions;
- change the grid each time the concentration at boundary becomes higher than a given threshold.

The three boundary conditions proved to be equivalent under such conditions, and, in our limited accuracy requirements, increasing the grid is made in such a way that the conservation of mass is not violated :

$$\int_{\Omega} r(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} r(x'_1, x'_2, t) dx'_1 dx'_2$$

or, in a discrete form

$$\sum_{i,j=-N}^N r_{i,j}(t)(\Delta x)^2 = \sum_{k,\ell=-N}^N r_{k,\ell}(t)(\Delta x')^2$$

where Δx is the step before increasing and $\Delta x'$ the step after increasing.

1.6.- Initial condition

The release is not instantaneous. When it goes to its end, the pollutant blot has some extent. Moreover, it is not possible, in the present state of our work, to simulate the release when it is just beginning.

Fortunately we dispose of an analytical solution [Nihoul (1972)] which exists only with very hard assumptions but is nevertheless usable for giving a reliable initial condition. This analytical solution will also be used to check the validity and accuracy of numerical methods (see 3.1).

2.- Numerical treatment

2.1.- Numerical approximation of derivatives

No matter what the numerical scheme, we use the following discrete formulae (forward in time, centered in space), $2N + 1$ being the number of grid points in one space direction.

$$(16) \quad \frac{\partial r_{i,j}}{\partial t} \sim \frac{r_{i,j}(t + \Delta t) - r_{i,j}(t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$= \frac{r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n}{\tau} + O(\tau)$$

where $\tau = \Delta t$.

$$(17) \quad \left[\frac{\partial r_{i,j}}{\partial x_1} \right]_t = \frac{r_{i+1,j}^n - r_{i-1,j}^n}{2 \ell} + O(\ell^2) = \nabla_1 r_{i,j}$$

where $\ell = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{L}{N}$

$$(18) \quad \left[\frac{\partial^2 r_{i,j}}{\partial x_1^2} \right]_t = \frac{r_{i+1,j}^n + r_{i-1,j}^n - 2 r_{i,j}^n}{\ell^2} + O(\ell^2) = \delta_1^2 r_{i,j}$$

For the mixed derivative,

$$(19) \quad \left[\frac{\partial^2 r_{i,j}}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_t = \frac{1}{4 \ell^2} [r_{i+1,j+1}^n + r_{i-1,j-1}^n - r_{i+1,j-1}^n - r_{i-1,j+1}^n] + O(\ell^2)$$

two discretizations are possible

$$(20) \quad (\beta_3 > 0) = - \frac{1}{2 \ell^2} (r_{i+1,j} + r_{i-1,j} + r_{i,j+1} + r_{i,j-1} - 2 r_{i,j} - r_{i+1,j+1} - r_{i-1,j-1}) + O(\ell^2)$$

$$(21) \quad (\beta_3 < 0) = \frac{1}{2 \ell^2} (r_{i+1,j} + r_{i-1,j} + r_{i,j+1} + r_{i,j-1} - 2 r_{i,j} - r_{i-1,j+1} - r_{i+1,j-1}) + O(\ell^2)$$

the latter being used to avoid (to some extent) the arising of negative concentrations. We write the general approximation :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\delta_1 \delta_2}{4 \ell^2} r + O(\ell^2) .$$

2.2.- Arizing of negative concentrations

Most of the trouble we had in our former study was due to arizing of negative concentrations. Since they have no physical meaning, they are a consequence of numerical discretization. If they grow, simulation is inaccurate. Treatment is described in Appendix I.

2.3.- Study of the simple explicit method

The simplest numerical scheme for integrating equation (11) is

$$\begin{aligned} r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n &= \frac{\tau}{2\ell} [\alpha_1^n (r_{i+1,j}^n - r_{i-1,j}^n) + \alpha_2^n (r_{i,j+1}^n - r_{i,j-1}^n)] \\ &\quad + \frac{\tau}{\ell^2} [\beta_1^n (r_{i+1,j}^n + r_{i-1,j}^n - 2r_{i,j}^n) + \beta_2^n (r_{i,j+1}^n + r_{i,j-1}^n - 2r_{i,j}^n) \\ &\quad + 2\beta_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4}) r_{i,j}^n] \\ &= \frac{\tau}{2\ell} (\alpha_1^n \nabla_1 r_{i,j}^n + \alpha_2^n \nabla_2 r_{i,j}^n) + \frac{\tau}{\ell^2} [\beta_1^n \delta_1^2 r_{i,j}^n + \beta_2^n \delta_2^2 r_{i,j}^n \\ &\quad + 2\beta_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4}) r_{i,j}^n] \end{aligned}$$

for which local accuracy is $O(\tau) + O(\ell^2)$.

This method leads to important negative concentrations; we have shown in our former report that there are theoretical reasons for this numerical phenomenon. It is thus badly suited to our evolution problem.

Its stability condition is the well-known inequality [see Richtmyer and Morton (1967)] :

$$\frac{\tau}{\ell^2} \leq \frac{1 + O(\tau)}{2 \max_{t \in [0,1]} (\beta_1^n + \beta_2^n)}$$

Theoretically, this condition ensures¹ stability for any value of α_1^n and α_2^n . Unfortunately, these terms are of an order of magnitude greater than the second-order derivatives. This phenomenon proved to be a cause of instability for every method we tried. These advection terms should be treated separately in order to avoid negative concentrations and non-conservation of mass. In the following methods, we no longer deal with A-operator, leaving this problem aside for further study.

2.4.- High precision explicit method

A high precision method must take into account second-order correction terms. Following Mitchell (1969) and emphasizing that the operators S and T are time dependant, let us write equation (11) :

$$(22) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = Sr + Tr$$

(advection operator is not studied)

$$(23) \quad L = S(t) + T(t)$$

$$(24) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} [L(t)r] = \dot{L}(t)r + L(t)[L(t)r]$$

$$\begin{aligned} (25) \quad r_{i,j}^{n+1} &= r]_t + \tau \left[\frac{\partial r}{\partial t} \right]_t + \frac{\tau^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right]_t \\ &= 1 + \tau Lr + \frac{\tau^2}{2} L^2 r + \frac{\tau^2}{2} \dot{L}r + O(\tau^2) \\ &= 1 + \tau (\beta_1^n D_1^2 + \beta_2^n D_2^2 + 2 \beta_3^n D_1 D_2) r_{i,j}^n + \frac{\tau^2}{2} (\beta_1^n D_1^2 + \beta_2^n D_2^2 + 2 \beta_3^n D_1 D_2)^2 r_{i,j}^n \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} (\dot{\beta}_1^n D_1^2 + \dot{\beta}_2^n D_2^2 + 2 \dot{\beta}_3^n D_1 D_2) r_{i,j}^n + O(\tau^2) \end{aligned}$$

Differential operators $D_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $D_2^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D_1 D_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$ may be approximated by 13-point difference formulae (instead of nine-point difference formulae for simple explicit method).

$$(26) \quad D_1^2 r_{i,j}^n = \frac{1}{\ell^2} (\delta_1^2 - \frac{1}{12} \delta_1^4) r_{i,j}^n + O(\ell^4)$$

$$(27) \quad D_1 D_2 r_{i,j}^n = \frac{1}{\ell^2} [(\frac{\delta_1 \delta_2}{4}) - (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})(\delta_1^2 + \delta_2^2)] r_{i,j}^n + O(\ell^4)$$

Equation (25) gives :

$$\begin{aligned}
 r_{i,j}^{n+1} = & \left\{ 1 + \frac{\tau}{\ell^2} [\beta_1^n \delta_1^2 + \beta_2^n \delta_2^2 + 2 \beta_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})] \right. \\
 & + \frac{\tau^2}{2 \ell^2} [\dot{\beta}_1^n \delta_1^2 + \dot{\beta}_2^n \delta_2^2 + 2 \dot{\beta}_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})] \\
 & + \frac{\tau^2}{12 \ell^2} [-\beta_1^n \delta_1^4 - \beta_2^n \delta_2^4 - 4 \beta_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})(\delta_1^2 + \delta_2^2)] \\
 & + \frac{\tau^2}{24 \ell^2} [-\dot{\beta}_1^n \delta_1^4 - \dot{\beta}_2^n \delta_2^4 - 4 \dot{\beta}_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})(\delta_1^2 + \delta_2^2)] \\
 & + \frac{\tau^2}{2 \ell^2} [\beta_1^{n2} \delta_1^4 + \beta_2^{n2} \delta_2^4 + (4 \beta_3^{n2} + 2 \beta_1^n \beta_2^n)(\frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{16}) \\
 & \left. + 4 \beta_3^n (\frac{\delta_1 \delta_2}{4})(\beta_1^n \delta_1^2 + \beta_2^n \delta_2^2)] \right\} r_{i,j}^n
 \end{aligned}$$

or, with $p = \frac{\tau}{\ell^2}$ and $\Delta \beta_i^n = \dot{\beta}_i^n \tau$,

$$\begin{aligned}
 r_{i,j}^{n+1} = & \left\{ 1 + p[(\beta_1^n + \frac{\Delta \beta_1^n}{2}) \delta_1^2 + (\beta_2^n + \frac{\Delta \beta_2^n}{2}) \delta_2^2 + 2 (\beta_3^n + \frac{\Delta \beta_3^n}{2})(\frac{\delta_1 \delta_2}{4})] \right. \\
 & - \frac{p}{12}[(\beta_1^n + \frac{\Delta \beta_1^n}{2}) \delta_1^4 + (\beta_2^n + \frac{\Delta \beta_2^n}{2}) \delta_2^4 + 4(\beta_3^n + \frac{\Delta \beta_3^n}{2})(\frac{\delta_1 \delta_2}{4})(\delta_1^2 + \delta_2^2)] \\
 & \left. + \frac{p^2}{2} [\dots] \right\} r_{i,j}^n + O(\tau^2) + O(\ell^4)
 \end{aligned}$$

$p \ll 1$ in all our calculations makes the last terms negligible. The study of stability yields a sufficient condition :

$$p < \frac{3}{7(\beta_1^n + \beta_2^n + \frac{\Delta \beta_1^n + \Delta \beta_2^n}{2})}$$

if $p \ll 1$ at each time step n . For the whole computation :

$$p < \frac{3}{7 \max_{t \in [0, T]} [\beta_1^n + \beta_2^n + \frac{\tau}{2} (\dot{\beta}_1^n + \dot{\beta}_2^n)]}$$

This method gives results comparable to those of following methods, but with more computation time and difficulties near the boundary of the grid.

2.5.- A.D.I. methods

Three alternating directions implicit methods have been worked out : two classical ones [Peaceman and Rachford (1955)] (1) Peaceman-Rachford, (2) Douglas-Rachford which we have extended to problems with mixed derivatives in quite a rough way, and a special one (3) McKee [McKee and Mitchell (1970)] for problems with mixed derivatives.

(1) P.R.

$$r_{i,j}^+ - r_{i,j}^n = \frac{p}{2} [\beta_1^+ \delta_1^2 r^+ + \beta_2^n \delta_2^2 r^n + 4 \varphi \beta_3^n \delta_1 \delta_2 r^n]_{i,j}$$

$$r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^+ = \frac{p}{2} [\beta_1^+ \delta_1^2 r^+ + \beta_2^{n+1} \delta_2^2 r^{n+1} + 4 (1 - \varphi) \beta_3^n \delta_1 \delta_2 r^n]_{i,j}$$

(2) D.R.

$$r_{i,j}^+ - r_{i,j}^n = p [\beta_1^+ \delta_1^2 r^+ + \beta_2^n \delta_2^2 r^n + 2 \varphi \beta_3^n \delta_1 \delta_2 r^n]_{i,j}$$

$$r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^+ = p [-\beta_2^n \delta_2^2 r^n + \beta_2^{n+1} \delta_2^2 r^{n+1} + 2(1 - \varphi) \beta_3^n \delta_1 \delta_2 r^+]_{i,j}$$

(3) McKee

$$r_{i,j}^+ - r_{i,j}^n = \left[\left(-\frac{1}{f} + \frac{1}{2} p \beta_1^+ \right) \delta_1^2 r^+ + \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{2} p \beta_1^n \right) \delta_1^2 r^n + p \beta_2^n \delta_2^2 r^n + \frac{1}{2} p \beta_3^n \delta_1 \delta_2 r^n + \frac{p}{f} (\beta_1^n + \beta_2^n) \delta_1^2 \delta_2^2 r^n \right]_{i,j}$$

$$r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^+ = \left[-\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^{n+1} \right) \delta_2^2 r^{n+1} + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^n \right) \delta_2^2 r^n \right]_{i,j}$$

where $0 \leq \varphi \leq 1$, f a parameter, $p = \frac{\tau}{\delta^2}$, r is the value of the unknown at a *fictive* time $t^+ : t < t^+ < t + \tau$. r^+ is in fact a first approximation for r^{n+1} .

It is easy to see that at each complete time step τ , the concentrations $r_{i,j}$ at $t + \tau$ are computed by an implicit method. But this computation is split into two partial time steps :

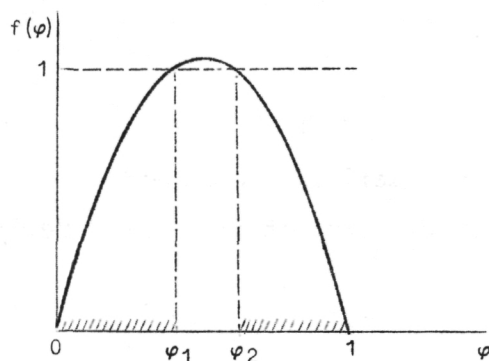
- first half step : implicit in the x_1 -direction
- second half step : implicit in the x_2 -direction.

Although the method is not explicit, the solution of every system of equations is very easy and quick because of the tri-diagonal form of the matrices involved, for which very efficient elimination methods are known (See Appendix II). That is possible only if the mixed derivative appears in an explicit form.

2.6.- Stability of A.D.I. methods

McKee proves that his method is unconditionally stable with regards to p , as far as $f < 0$ or $f \geq 4$ and that it is highly accurate if $f = 12$ [classical result : see Mitchell (1969)]. This is for *global* accuracy and comes from numerical experiments. *Local* accuracy for all methods is $O(\tau) + O(\ell^2)$.

P.R. and D.R. A.D.I. methods are unconditionally stable in the hachured domain.



φ_1 and φ_2 are functions of the β_i^n ,
 $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0, 1$.

Stability condition : $f(\varphi) \leq 1$.

3.- Results and conclusions

3.1.- Analytical solution

Nihoul (1972) has shown that equation (10) has one analytical solution if we add the following assumptions :

- 1) tidal currents indicatrix is an ellipse
- 2) Approximation 3 (see section 1.4) is performed
- 3) release is instantaneous and punctiform
- 4) $\mu \sim 0$.

The analytical solution of

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + v_2 \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}$$

(dimensionless form)

with

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{\alpha a}{\pi U^*} B(k) \\ v_2 = \frac{\alpha a}{\pi U^*} \frac{b^2}{a^2} D(k) \end{array} \right.$$

where a, b are the axes of the tidal ellipse

$$U^* = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0$$

$$B(k) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$D(k) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

is

$$r(x_1, x_2, t) = r_0 (v_1 v_2)^{-\frac{1}{2}} t^{-1} \exp \left(-\frac{x_1^2}{4 v_1 t} - \frac{x_2^2}{4 v_2 t} \right).$$

This solution is used to initialize the numerical procedures.

For $t = t_0$, distribution is stored in program matrices and numerical computations begin to run.

Two values of t_0 have been used (in real dimensional time)

$$t_0 = 3 \text{ hours}$$

$$t_0 = 24 \text{ hours}.$$

3.2.- Explicit methods

The simple explicit method has been left aside for two reasons :

- arising of important negative concentrations
- strong dependance towards time step.

No interesting results are thus given.

The high precision explicit method gives results comparable to those given by A.D.I. methods. But computation time is higher. This method seems to be better adapted for problems with complex boundaries where A.D.I. methods are too uneasy to use (from the programmer's point of view).

3.3.- A.D.I. methods

1) For each method there is no significant difference between results of Approximation 1 and Approximation 3 (see section 1.4.) (no advection).

2) The second approximation (equation 20) for mixed derivatives inhibits arising of negative concentrations. This is of little interest

because all A.D.I. methods are accurate and produce negative numbers of very small absolute value. Since approximation (equation 20) requires more computation time for little efficiency, it is of no use.

3) P.R. and D.R. methods give the same results whatever φ is ($\varphi \in [0,1]$).

4) All methods fail when the initial data are too steep (for example $t_0 = 3$ h). A rather amazing phenomenon occurs then :

At each time step n we approximate

$$\int_{\Omega} r(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2$$

by

$$[(\Delta x)^2 \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N r_{i,j}^n]$$

All methods conserve the discrete integral; but the latter is a bad approximation of the real integral when the function $r(x_1, x_2, t)$ is non-smooth ($\Sigma > f$). Thus a constant error, arising from the discretization of steep initial gradients, yields ill-conditioned solution. Every attempt to get accurate solution in such a case has proved to be unsatisfactory.

5) McKee's method gives the most accurate results with the same computation time as the usual improved D.R. method. That is our most important result, since we have now got a reliable numerical method.

Appendix I - Treatment of the negative concentrations

1) The whole treatment is made by a subroutine which is or is not called by the main program, depending on the value of a logical variable, given by the programmer.

2) A threshold $r_0 = \varepsilon \max_{i,j} (r_{i,j})$ is defined. ε is the accuracy that we expect to be reached by the numerical method [$\varepsilon = O(\ell^2)$].

3) A loop of the subroutine adds all negative concentrations; this sum is divided by the number of points (i,j) where the concentration $r_{i,j}$ is higher than zero. Another loop adds this amount to every point where $r_{i,j} > 0$. Other concentrations are given a nul value. This is the first correction.

4) A second correction can be performed and is controlled by the value of a second logical variable. After the first correction, it may seldom

happen that negative concentrations still exist. At each of these points the program tests all points surrounding it and adds to them a part of the negative perturbing value, if they are positive.

Let us note that these corrections have very little effect on the numerical calculations. Had they, it would be dangerous because they have no theoretical justification : correcting the negative values is in fact changing the differential equation in some unknown sense and perturbing the evolution.

A better and obvious way to avoid important negative concentrations is to use more accurate numerical methods.

Appendix II - Elimination method for solving sets of equations with tri-diagonal matrices

Computing the numerical solution of a parabolic equation by A.D.I. methods leads to solve sets of algebraic equations with tri-diagonal matrices.

For example, second step of McKee's method can be written :

$$(A.1) \quad r_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^{n+1}\right) \delta_2^2 r_{i,j}^{n+1} = r_{i,j}^+ + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^n\right) \delta_2^2 r_{i,j}^n$$

or, if we put

$$(A.2) \quad r_{i,j} = u_j$$

$$(A.3) \quad A_j = - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^{n+1}\right)$$

$$B_j = 1 - 2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^{n+1}\right)$$

$$C_j = - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^{n+1}\right)$$

$$D_j = r_{i,j}^+ + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{2} p \beta_2^n\right) \delta_2^2 r_{i,j}^n$$

We get

$$(A.4) \quad -A_j u_{j+1} + B_j u_j - C_j u_{j-1} = D_j$$

in a general form.

The general associated boundary condition is

$$(A.5) \quad \alpha \frac{\partial r}{\partial n} + \beta r = 0$$

where

$$(A.6) \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \pm \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

A discrete form of boundary condition is at

$$(A.7) \quad x_i = -L : \quad \alpha \frac{r_{i1} - r_{i0}}{\ell} + \beta r_{i0} = 0 \quad \text{or} \quad \alpha \frac{u_1 - u_0}{\ell} + \beta u_0 = 0$$

$$(A.8) \quad x_i = +L : \quad \alpha \frac{r_{iN} - r_{i,N-1}}{\ell} + \beta r_{iN} = 0 \quad \text{or} \quad \alpha \frac{u_N - u_{N-1}}{\ell} + \beta u_N = 0$$

We have extended a classical elimination method [Richtmyer and Morton (1967)] to that particular case of boundary conditions. Let us assume that there exists a recurrent relationship :

$$(A.9) \quad u_j = E_j u_{j+1} + F_j \qquad u_{j-1} = E_{j-1} u_j + F_{j-1}$$

and let us eliminate u_{j-1} between equation (A.9) and equation (A.4)

$$(A.10) \quad -A_j u_{j+1} + B_j u_j - C_j E_{j-1} u_j - C_j F_{j-1} = D_j$$

and identify equations (A.10) and (A.9)

$$u_j (B_j - C_j E_{j-1}) = D_j - C_j F_{j-1} + A_j u_{j+1}$$

Thus

$$(A.11) \quad E_j = \frac{A_j}{B_j - C_j E_{j-1}}$$

$$(A.12) \quad F_j = \frac{D_j - C_j F_{j-1}}{B_j - C_j E_{j-1}}$$

and recurrent formulae for E_j and F_j follow (A_j , B_j , C_j , D_j are known). Now the problem is to determine E_0 and F_0 by the boundary conditions. When E_0 and F_0 are known, all E_i and F_i can be computed for j going from 0 to $2N$; thereafter compute u_{2N} and u_{2N-1} by the boundary conditions; solution of the system is then found.

At $x_i = -L$ ($j = 0$) let us identify equations (A.9) and (A.7)

$$u_0 = E_0 u_1 + F_0$$

$$\alpha(u_0 - u_1) + \beta l u_0 = 0$$

$$u_0 (\alpha + \beta l) + u_1 (-\alpha) = 0$$

$$u_0 = \frac{\beta l + \alpha}{\alpha} u_1$$

thus

$$(A.13) \quad F_0 = 0$$

$$(A.14) \quad E_0 = \frac{\alpha}{\beta l + \alpha}$$

Let us derive u_N and u_{N-1} :

$$u_{N-1} = E_{N-1} u_N + F_{N-1} \quad (E_{N-1} \text{ and } F_{N-1} \text{ are known})$$

$$\alpha(u_N - u_{N-1}) + \beta l u_N = 0$$

$$-\alpha u_{N-1} + \alpha u_N + \beta l u_N = 0$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta l} u_{N-1} = u_N$$

$$u_{N-1} = E_{N-1} \frac{\alpha}{\alpha + \beta l} u_{N-1} + F_{N-1}$$

$$u_{N-1} = \frac{F_{N-1}}{1 - E_{N-1} \frac{\alpha}{\alpha + \beta l}}$$

$$u_N = \frac{\alpha}{\alpha + \beta l} u_{N-1}$$

Other u 's are computed by the recurrence formulae (A.9).

Figure Captions

N.B. Advection is nowhere taken into account.

Fig. 1 gives the evolution of concentration at central point (0,0) for different time steps. Curve 1 is obtained with a step size τ of 10 minutes (in real time). Curve 2 is obtained with a step size τ of 1 hour. The latter curve does not fit analytical solutions at all and is thus left aside. Explicit method proves to give results strongly dependent on τ , upon which we cannot rely very much. With $\tau = 10$ min, results seem to agree fairly with results of other method, but computation time is much higher.

Fig. 2 is a comparison of two numerical experiments with the explicit method ($\tau = 10$ min). In Curve 1 no corrections for negative concentrations are made. In Curve 2 corrections are performed. Corrections appear to have little effect. On other methods (A.D.I.) still fewer effects are observed.

Fig. 3 shows the evolution of central concentration in a computation where a change of the grid occurs at $\tau = 100$ hours after the beginning of release (in real time). No discontinuity appears.

Fig. 4 is a comparison between A.D.I. methods. All curves represent central concentration. Curve 1 is the result of D.R. method with approximation (19) for the mixed derivative. Curve 2 is the result of P.R. method with the same approximation. Curve 3 is the result of P.R. method with approximation (20). The first two curves are undistinguishable. The last is very close to the other two.

Fig. 5 shows the effect of τ on A.D.I. methods. τ has been taken 1 h and 10 min (in real time) for the P.R. and D.R. methods. The four curves are undistinguishable.

Fig. 6 compares results of A.D.I. (D.R.) method (Curve 1) and high precision explicit method (Curve 2) for initial steep gradients. Both solutions are quite different from analytical solution (the straight line in our log-log diagram).

Fig. 7 shows the result of a numerical experiment with McKee's method. For these computations, the tidal current indicatrix was supposed to be an ellipse

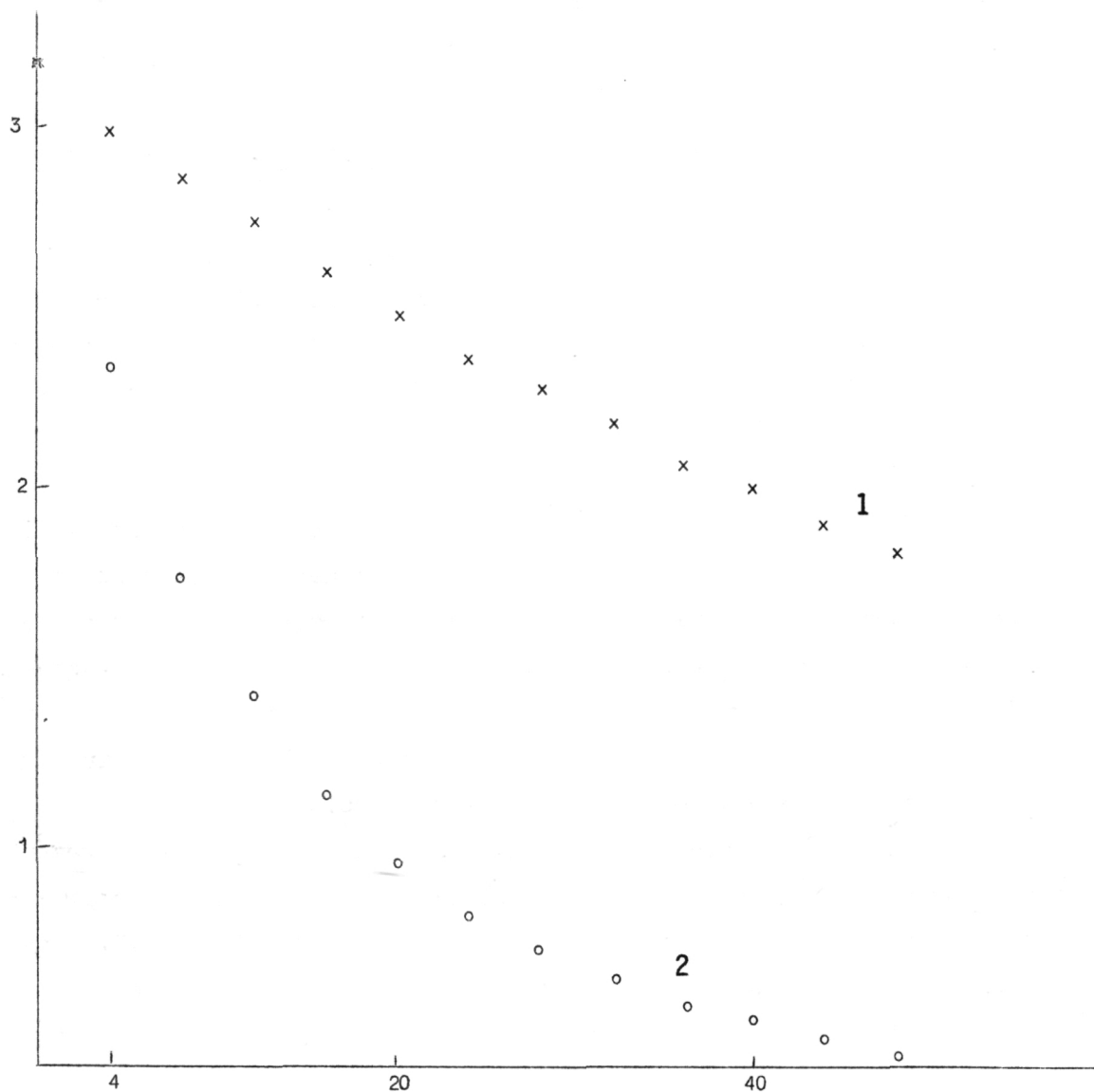
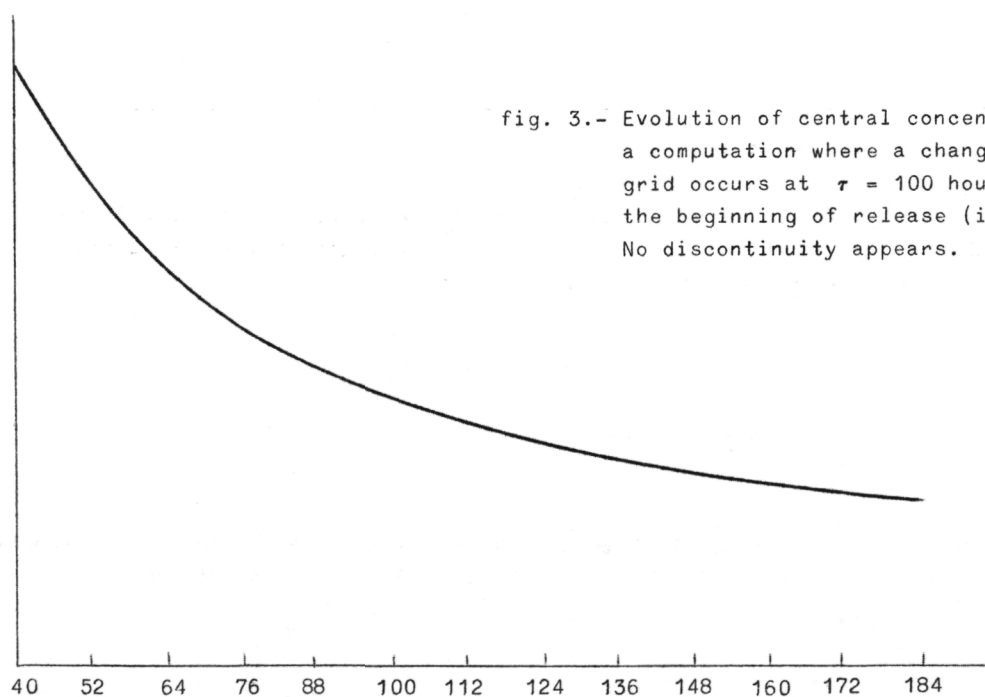
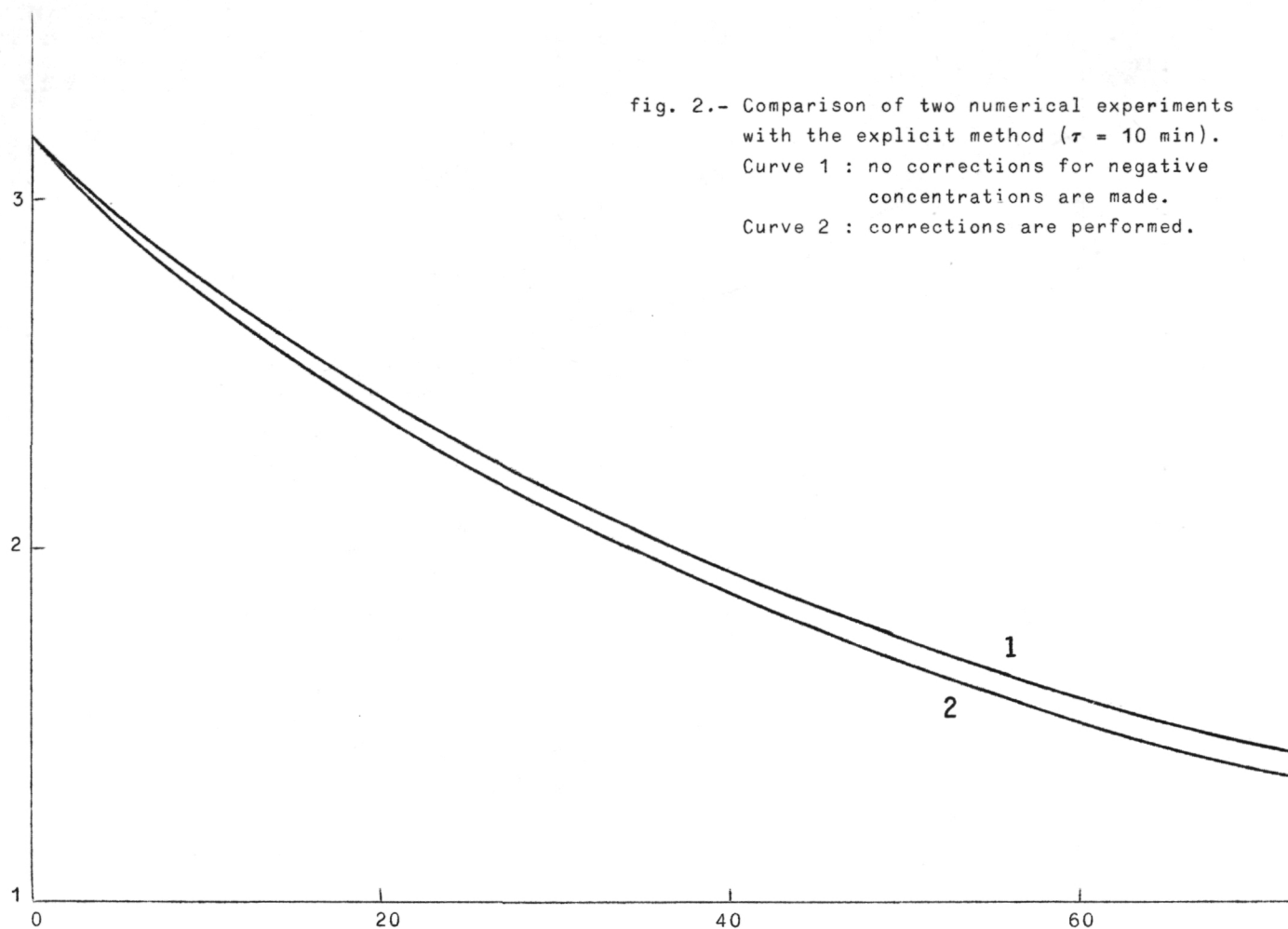


fig. 1.- Evolution of concentration at central point (0,0) for different time steps.
Curve 1 is obtained with a step size τ of 10 minutes (in real time). Curve 2
is obtained with a step size τ of 1 hour.



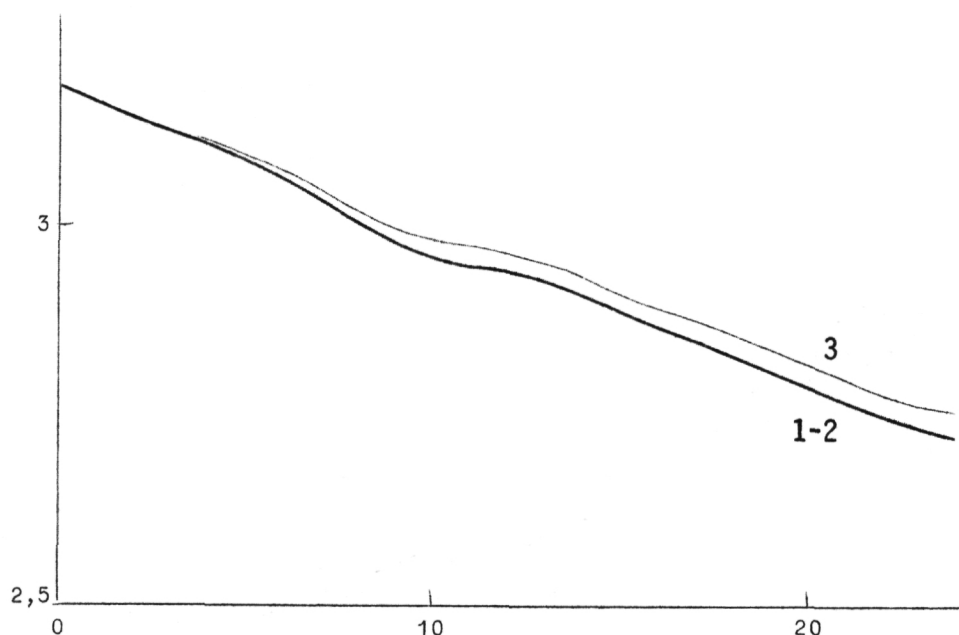


fig. 4.- Comparison between A.D.I. methods; all curves represent central concentration.
Curve 1 : result of D.R. method with approximation (19) for the mixed derivative.
Curve 2 : result of P.R. method with the same approximation.
Curve 3 : result of P.R. method with approximation (20).

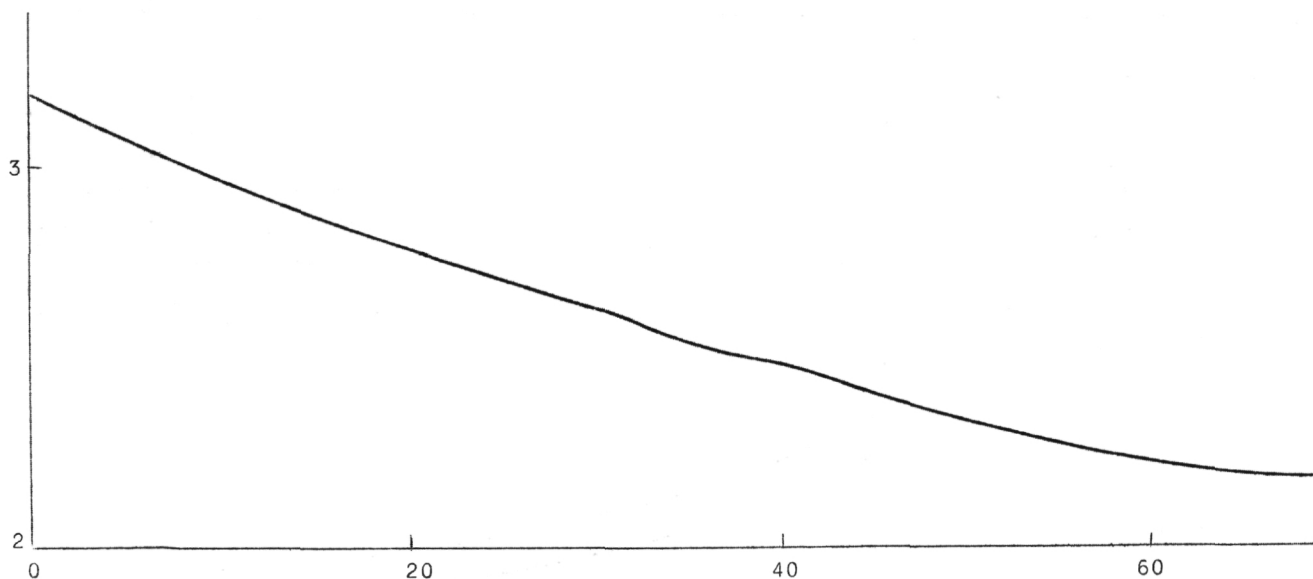


fig. 5.- Effect of τ on A.D.I. methods. τ has been taken 1 h and 10 min (in real time) for the P.R. and D.R. methods. The four curves are undistinguishable.

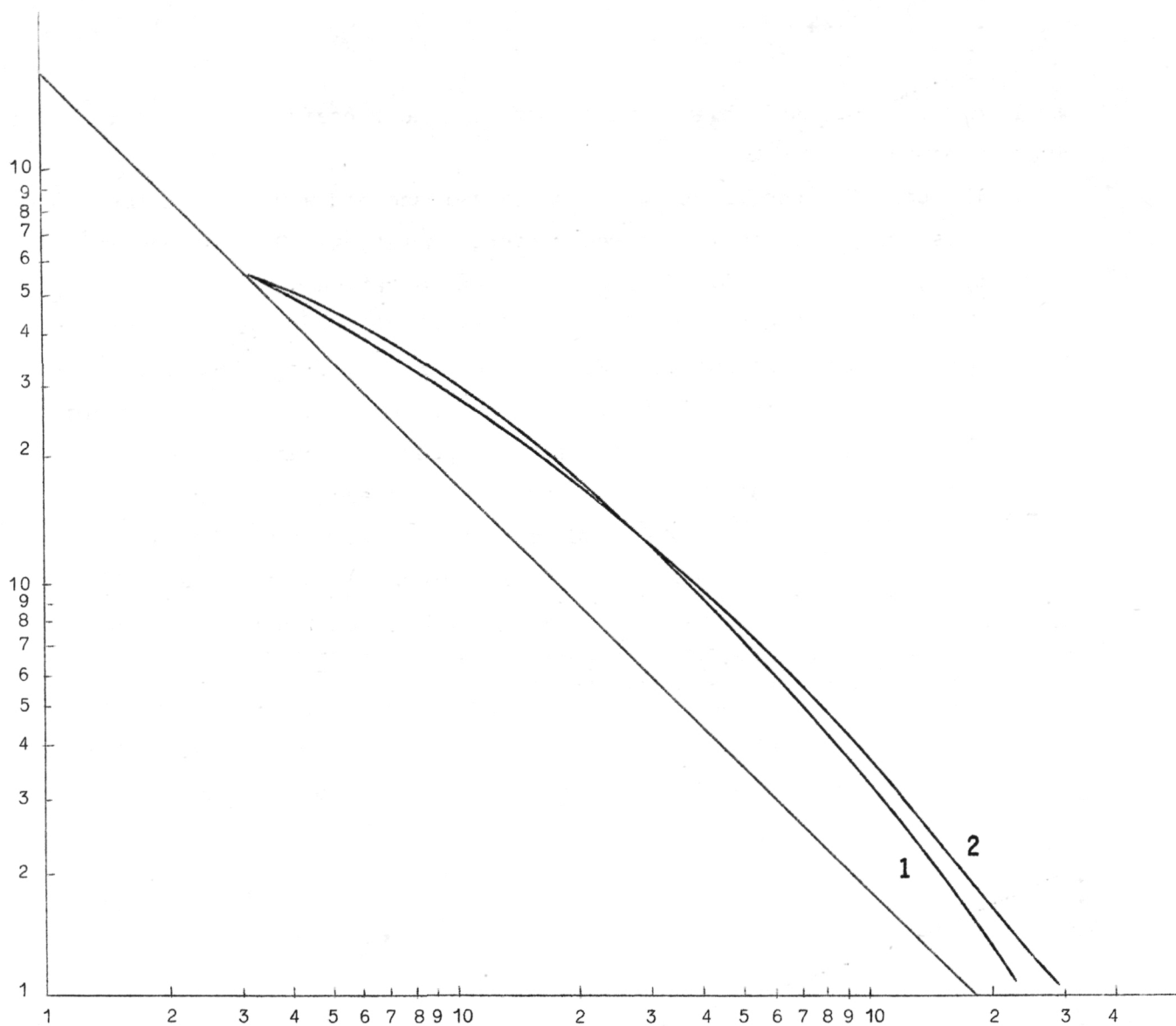


fig. 6.- Comparison between results of A.D.I. (D.R.) method (curve 1) and high precision explicit method (curve 2) for initial steep gradients.
Straight line : analytical solution.

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1$$

with $a = 0.8$ m/s and $b = 0.2$ m/s and α (shear coefficient) = 1 ,
H (mean depth) = 30 m .

The computations began 24 h after release and were led during 24 h .
Curve 1 is 0.75 of central concentration; Curve 2 is 0.1 of central concentration; Curve 3 is 0.01 of central concentration.

Fig. 8 shows the result of the analytical solution 48 h after release with the same assumptions. We can see here how close are results from numerical and analytical solution. Their shape (which our contouring program yields) is very close to the exact ellipses they ought to be. This proves the efficiency of our drawing program. The axes and extreme points of the theoretical ellipse of isoconcentration corresponding to Curve 3 are drawn on the figure (dash-dot lines and crosses). Curve 1 is 0.75 of central concentration; Curve 2 is 0.1 of central concentration; Curve 3 is 0.01 of central concentration.

Fig. 9 gives a comparison between D.R. (curve 1), McKee (curve 2, crosses) and analytical solution (straight line). Both numerical methods are fairly accurate and McKee's solution may be considered exact (for initial smoothed gradients).

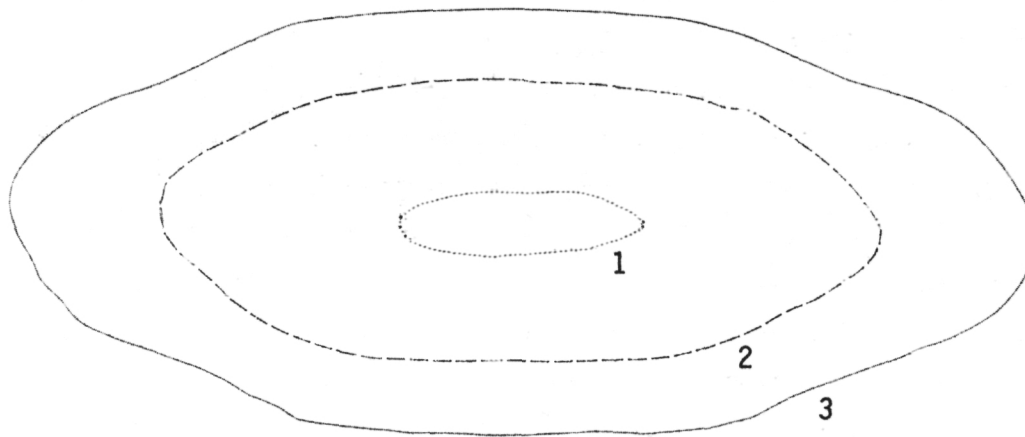


fig. 7.- Result of a numerical experiment with McKee's method. The computations began 24 h after release and were led during 24 h. Curve 1 is 0.75 of central concentration; curve 2 is 0.1 of central concentration; curve 3 is 0.01 of central concentration.

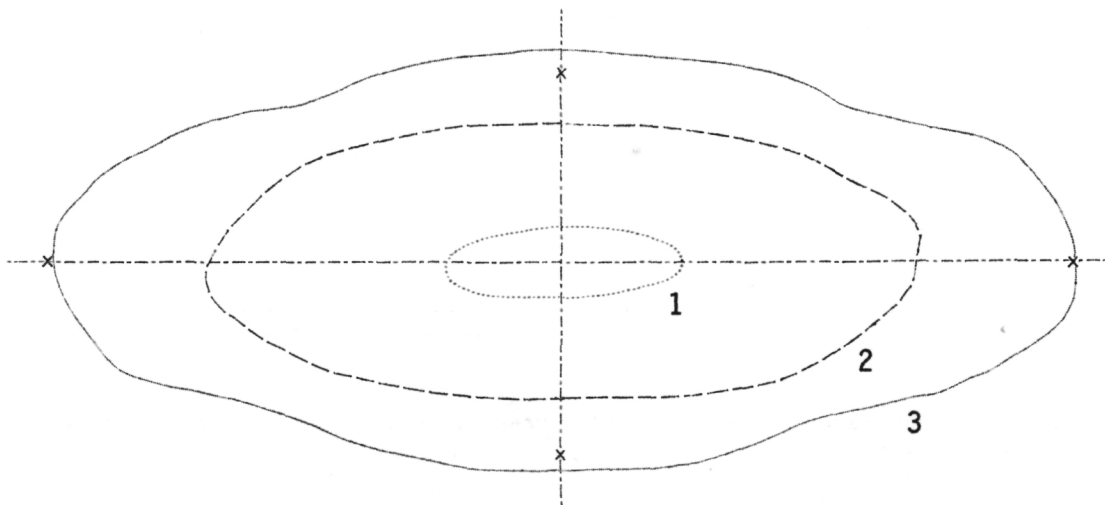


fig. 8.- Result of the analytical solution 48 h after release with the same assumptions. The axes and extreme points of the theoretical ellipse of isoconcentration corresponding to curve 3 are drawn on the figure (dash-dot lines and crosses). The curves 1, 2 and 3 are respectively 0.75 , 0.1 and 0.01 of central concentration.

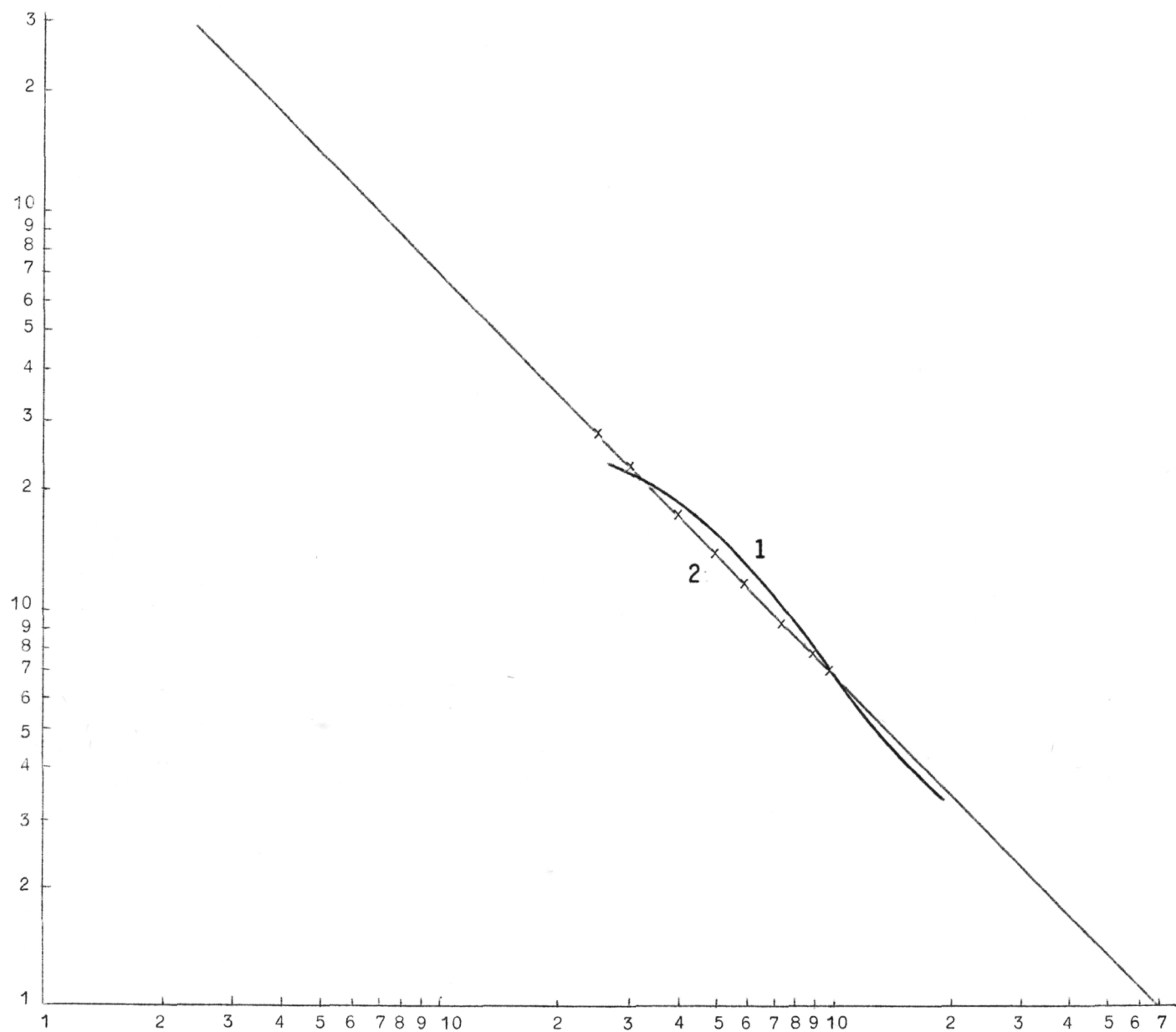


fig. 9.- Comparison between D.R. (curve 1), McKee (curve 2, crosses) and analytical solution (straight line).

References

- ADAM (Y.) and RUNFOLA (Y.), (1971). *Numerical Methods*, in *Modèle mathématique - Rapport de synthèse*, Programme national sur l'environnement physique et biologique, pp. 77-86.
- McKEE (S.) and MITCHELL (A.R.), (1970). Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative, *The Computer Journal*, 13, 1.
- MITCHELL (A.R.), (1969). *Computational methods in mathematical physics*.
- NIHOUL (J.C.J.), (1971). *Shear effect and eddy diffusivity*, in *Modèle mathématique - Rapport de synthèse*, Programme national sur l'environnement physique et biologique, pp. 35-46.
- NIHOUL (J.C.J.), (1972). *Shear effect diffusion in shallow open seas*, in *Bull. Soc. Sc. Lg.*, (in press).
- PEACEMAN (D.W.) and RACHFORD (H.H.), (1955). The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indus. Appl. Math.*, 3, 1.
- RICHTMYER and MORTON, (1967). *Difference Methods for Initial Value Problems*.